દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ 3

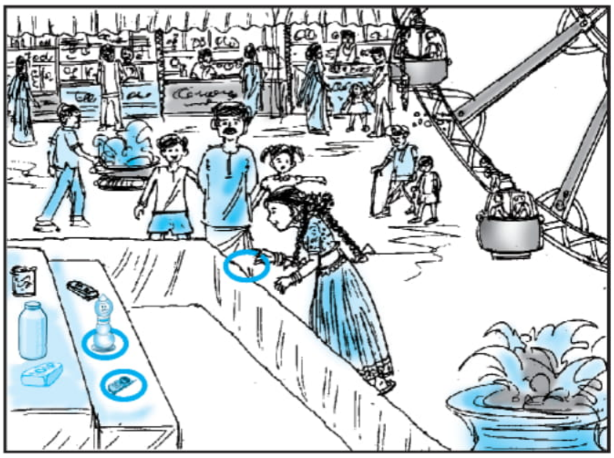
H3B6R8

3.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે નીચે આપેલી પરિસ્થિતિ જેવી પરિસ્થિતિમાંથી પસાર થયાં જ હશો.

અખિલા તેના ગામમાં મેળામાં ગઈ હતી. તેને ચકડોળમાં બેસવાનો આનંદ માણવો હતો અને હૂપલા (Hoopla) (જેમાં તમે સ્ટોલમાં રાખેલી વસ્તુઓ પર રિંગ ફેંકો અને જો રિંગ કોઈ પણ વસ્તુને સંપૂર્ણ આવરી લે, તો તે વસ્તુ તમને મળે એવી એક રમત) રમવા માંગતી હતી. તે જેટલી વખત હૂપલા રમી તે સંખ્યા એ ચકડોળ પરની સવારીની સંખ્યાથી અડધી છે. જો પ્રત્યેક વખત ચકડોળમાં બેસવાનો ખર્ચ ₹ 3 અને હૂપલાની પ્રત્યેક રમત રમવાનો ખર્ચ ₹ 4 થતો હોય, તો તમે ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યા કેવી રીતે શોધી શકશો અને તે કેટલી વાર હૂપલાની રમત રમી હશે તે કેવી રીતે નક્કી કરશો? તેણે આ માટે કુલ ₹ 20 ખર્ચ્યા હતા.

કદાચિત્, તમે વિવિધ સ્થિતિની વિચારણા કરીને અજમાવી શકો છો. જો તેણે એક વખત સવારી કરી હોય, તે શક્ય છે ? શું બે વખત સવારી શક્ય છે ? અને આમ આગળ ચાલો અથવા આવી પરિસ્થિતિઓને દર્શાવવા માટે તમે ધોરણ IX ના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી શકો.



ચાલો આ અભિગમ અપનાવીએ.

અખિલાની ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યાને x કહો અને હૂપલા રમવાની સંખ્યાને y કહો. આ પરિસ્થિતિને બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$y = \frac{1}{2}x \qquad \text{.... (1)}$$

$$3x + 4y = 20 \qquad \text{.... (2)}$$

શું આપણે આ બે સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીશું?

ઉકેલ શોધવાની ઘણી રીતો છે. આપણે આ પ્રકરણમાં તેમનો અભ્યાસ કરીશું.

3.2 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ

L4Q7P2

ધોરણ IX નો અભ્યાસ યાદ કરો. નીચે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનાં ઉદાહરણો છે :

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

અને $x - 0y = 2$, એટલે કે $x = 2$

જો a, b અને c એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય અને a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોય તો જે સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય તેને ચલ x અને ચલ y માં દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે એમ તમે જાણો છો. (a અને b એક સાથે શૂન્ય ન હોઈ શકે તે શરતને સામાન્ય રીતે $a^2 + b^2 \neq 0$ વડે પણ દર્શાવાય છે).

તમે અભ્યાસ કર્યો છે કે, આવા સમીકરણના ઉકેલનાં મૂલ્યોની એક x અને બીજો y એમ એક જોડ મળે છે. તે સમીકરણની બંને બાજુઓ સમાન બનાવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ $2x + 3y = 5$ ની ડાબી બાજુએ $x = 1$ અને $y = 1$ કિંમત મૂકતાં,

ડાબી બાજુ $= 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5$ અને તે સમીકરણની જમણી બાજુ બરાબર છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 1$ એ $2x + 3y = 5$ નો એક ઉકેલ છે.

હવે, $x = 1$ અને $y = 7$ કિંમત $2x + 3y = 5$ માં મૂકતાં,

$$\text{ડાબી બાજુ} = 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$$

તે સમીકરણની જમણી બાજુ બરાબર નથી.

તેથી, $x = 1$ અને $y = 7$ એ $2x + 3y = 5$ નો ઉકેલ નથી.

ભૌમિતિક રીતે, આનો અર્થ શું છે ? તેનો અર્થ એ છે કે બિંદુ (1, 1) એ સમીકરણ $2x + 3y = 5$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખા પર છે અને (1, 7) તે રેખા પર નથી. તેથી સમીકરણનો દરેક ઉકેલ તે સમીકરણને દર્શાવતી રેખા પરના બિંદુનું નિરૂપણ છે.

હકીકતમાં, આ કોઈ પણ સુરેખ સમીકરણ માટે સત્ય છે, એટલે કે **$ax + by + c = 0$ નો પ્રત્યેક ઉકેલ (x, y) એ સમીકરણને દર્શાવતી રેખા પરના કોઈ બિંદુને સંગત છે અને આનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.**

હવે, ઉપર્યુક્ત સમીકરણ (1) અને (2) નો વિચાર કરો.

આ સમીકરણો અખિલાની મેળાની મુલાકાત વિશેની માહિતી એક સાથે દર્શાવે છે.

આ બંને સુરેખ સમીકરણોમાં x અને y માત્ર બે ચલ છે. આ સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહે છે.

ચાલો આ જોડીનો બીજગણિતની રીતે વિચાર કરીએ.

ચલ x અને y માં દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ છે. અહીં $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલાં છે :

$2x + 3y - 7 = 0$ અને $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ અને $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ અને $17 = y$

શું તમે જાણો છો કે ભૌમિતિક રીતે તે શું સૂચવે છે ?

યાદ કરો, તમે ધોરણ IX માં ભૌમિતિક રીત (એટલે કે આલેખની રીત)નો અભ્યાસ કર્યો છે કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ એ રેખા નિર્દેશ કરે છે. શું તમે હવે કહેશો કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું આલેખાત્મક સ્વરૂપ કેવું દેખાશે ? તે બે રેખાઓ એક સાથે દર્શાવશે.

તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો કે, સમતલમાં બે રેખાઓ માટે નીચેની ત્રણ શક્યતાઓ પૈકી એક અને માત્ર એક સત્ય હોઈ શકે :

(i) બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદશે.

(ii) બે રેખાઓ છેદતી નથી, એટલે કે તે પરસ્પર સમાંતર છે.

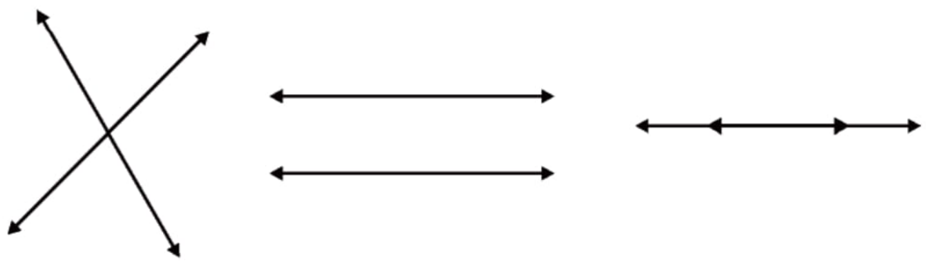
(iii) બે રેખાઓ સંપાતી થશે.

આપણે આ બધી શક્યતાઓને આકૃતિ 3.1માં બતાવી છે.

આકૃતિ 3.1 (a), બંને છેદે છે.

આકૃતિ 3.1 (b), બંને સમાંતર છે.

આકૃતિ 3.1 (c), બંને સંપાતી છે.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 3.1

સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રજૂઆત કરવા બૈજિક અને ભૌમિતિક રીત બંનેનો સાથે-સાથે ઉપયોગ થઈ શકે છે.

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : આપણે વિભાગ 3.1 માંથી ઉદાહરણ લઈએ. અખિલા ₹ 20 લઈને મેળામાં જાય છે અને તે ચકડોળમાં બેસવા માંગે છે અને હૂપલા રમત રમે છે. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે (ભૌમિતિક રીતે) રજૂ કરો.

ઉકેલ : સમીકરણોની જોડીઓ :

$$y = \frac{1}{2}x$$

એટલે કે, $x - 2y = 0$ (1)

$3x + 4y = 20$ (2)

આપણે આ સમીકરણોને આલેખાત્મક રીતે દર્શાવીએ. આ માટે આપણને દરેક સમીકરણ માટે ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલની જરૂર છે. આપણે આ ઉકેલો કોષ્ટક 3.1માં આપીએ.

કોષ્ટક 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

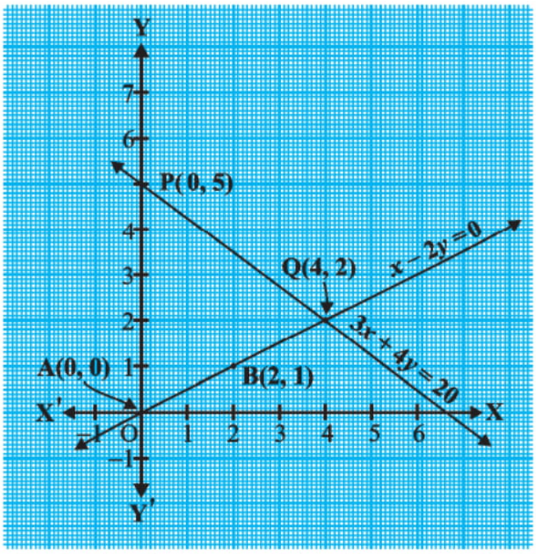
(i)

x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

(ii)

ધોરણ IX માંથી યાદ કરીએ કે, દરેક સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલો છે. તેથી તમે કોઈ પણ બે મૂલ્યો પસંદ કરી શકો છો. આપણે પસંદ કર્યાં છે તે મૂલ્ય પસંદ કરવા જરૂરી નથી. તમે અનુમાન કરી શકો કે, આપણે શા માટે પ્રથમ સમીકરણમાં અને બીજા સમીકરણમાં $x = 0$ પસંદ કર્યું છે ? જ્યારે એક ચલ શૂન્ય હોય છે ત્યારે સમીકરણ એક ચલ સુરેખ સમીકરણ મળશે અને તે સરળતાથી ઉકેલી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ (2) માં $x = 0$ મૂકતાં, આપણને $4y = 20$ મળે એટલે કે $y = 5$ મળે છે. તે જ રીતે સમીકરણ (2) માં $y = 0$ મૂકતાં આપણને $3x = 20$ મળે. એટલે કે $x = \frac{20}{3}$ મળે છે. પણ $\frac{20}{3}$ એ પૂર્ણાંક નથી. આલેખપત્ર પર તેનું આલેખન સરળતાથી થઈ શકે નહિ. તેથી, આપણે $y = 2$ પસંદ કરીએ છીએ અને આપણને પૂર્ણાંક મૂલ્ય $x = 4$ મળે છે.

કોષ્ટક 3.1માંથી ઉકેલને સંગત બિંદુઓ A(0, 0), B(2, 1) અને P(0, 5), Q(4, 2) દર્શાવો. હવે રેખાઓ AB અને PQ દોરો. તે આકૃતિ 3.2 માં સમીકરણ $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y = 20$ નું નિરુપણ કરે છે.



આકૃતિ 3.2

આકૃતિ 3.2 માં અવલોકન કરો કે બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ પરસ્પર બિંદુ Q (4, 2)માં છેદે છે. પછીના વિભાગમાં આપણે આનો શો અર્થ થાય છે તે અંગે ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 2 : રોમીલાએ સ્ટેશનરીની દુકાનમાંથી 2 પેન્સિલ અને 3 રબર ₹ 9 માં ખરીદ્યાં હતાં. તેની મિત્ર સોનાલીએ રોમીલા પાસેની પેન્સિલોમાં નવીન પ્રકારની પેન્સિલો અને રબર જોયાં અને તેણે પણ તેટલી જ કિંમતોવાળાં 4 પેન્સિલ અને 6 રબર ₹ 18માં ખરીદ્યાં હતા. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે 1 પેન્સિલની કિંમત ₹ x અને 1 રબરની કિંમત ₹ y છે. તેથી સમીકરણોનું બૈજિક સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે છે.

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

તેને સમકક્ષ આલેખાત્મક નિરુપણ મેળવવા માટે, આપણે દરેક સમીકરણનું નિરૂપણ કરતી રેખા પર બે બિંદુઓ શોધીશું. એટલે કે આપણે દરેક સમીકરણના બે ઉકેલો શોધીએ.

આ ઉકેલ કોષ્ટક 3.2 માં આપવામાં આવ્યા છે.

કોષ્ટક 3.2

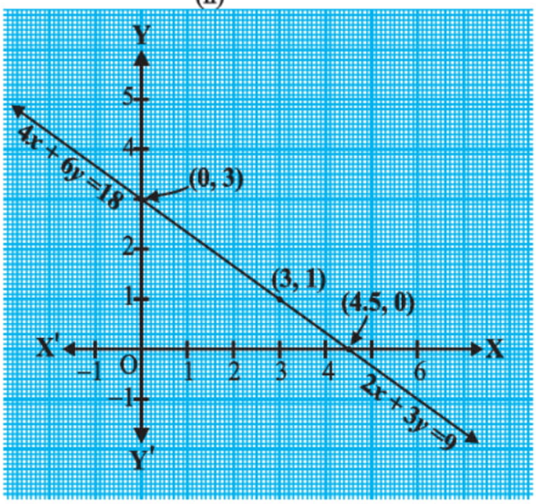
(i)

x	0	4.5
$y = \frac{9-2x}{3}$	3	0

(ii)

x	0	3
$y = \frac{18-4x}{6}$	3	1

આપણે આ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર મૂકીને રેખાઓ દોરીશું. આપણને બે સંપાતી રેખાઓ મળશે. (જુઓ આકૃતિ 3.3.) આમ બનવાનું કારણ એ છે કે, બંને સમીકરણો એકરૂપ છે. એટલે કે એક સમીકરણ પરથી બીજું સમીકરણ તારવી શકાય.



આકૃતિ 3.3

ઉદાહરણ 3 : રેલવેના બે પાટા સમીકરણ $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવેલા છે. આ પરિસ્થિતિનું ભૌમિતિક રીતે નિરૂપણ કરો.

ઉકેલ : સમીકરણો

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

ના બે-બે ઉકેલો કોષ્ટક 3.3 માં આપેલા છે.

કોષ્ટક 3.3

(i)

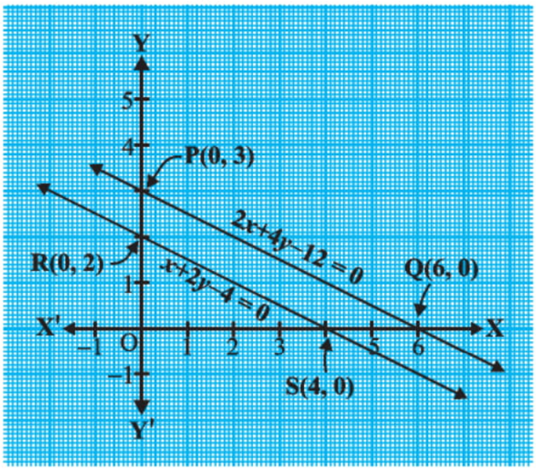
x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

(ii)

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

સમીકરણોને આલેખપત્ર પર દર્શાવતાં આપણને બિંદુઓ R (0, 2) અને S (4, 0)ને જોડતી રેખા RS અને બિંદુઓ P (0, 3) અને Q (6, 0)ને જોડતી રેખા PQ મળે છે. આપણે આકૃતિ 3.4 માં અવલોકન કરીએ તો રેખાઓ ક્યાંય છેદતી નથી એટલે કે તે સમાંતર છે.

આપણે સુરેખ સમીકરણયુગ્મ દ્વારા દર્શાવાતી કેટલીક પરિસ્થિતિ જોઈ. આપણે તેમને બૈજિક અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવ્યા છે. હવે પછીના કેટલાક વિભાગમાં આપણે ચર્ચા કરીશું કે, આ બૈજિક અને ભૌમિતિક રજૂઆતોના ઉપયોગથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મની જોડના ઉકેલો કેવી રીતે મેળવાય.



આકૃતિ 3.4

સ્વાધ્યાય 3.1

1. આફતાબ તેની દીકરીને કહે છે, ''સાત વર્ષ પહેલાં મારી ઉંમર તે વખતની તારી ઉંમર કરતાં સાત ગણી હતી હવે પછીનાં ત્રણ વર્ષ પછી મારી ઉંમર તારી તે વખતની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી હશે.'' (શું આ રસપ્રદ છે ?) આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને આલેખની રીતે દર્શાવો.

2. ક્રિકેટ ટીમના પ્રશિક્ષક ₹ 3900 માં 3 બૅટ અને 6 દડાઓ ખરીદે છે. પછી તે બીજું તે જ પ્રકારનું 1 બૅટ અને તે જ પ્રકારના વધુ 3 દડાઓ ₹ 1300 માં ખરીદે છે. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવો.

3. એક દિવસે 2 કિગ્રા સફરજન અને 1 કિગ્રા દ્રાક્ષની કિંમત ₹ 160 હતી. એક મહિના પછી 4 કિગ્રા સફરજન અને 2 કિગ્રા દ્રાક્ષની કિંમત ₹ 300 હતી. આ પરિસ્થિતિને બૈજિક રીતે અને ભૌમિતિક રીતે દર્શાવો.

3.3 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે આલેખની રીત

P7F5V6

આના પહેલાના વિભાગમાં તમે જોઈ ગયાં કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રેખાઓને આલેખપત્ર પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. તમે એ પણ જોઈ ગયાં કે રેખાઓ છેદે અથવા સમાંતર હોય કે સંપાતી હોઈ શકે. દરેક વિકલ્પમાં આપણે સમીકરણયુગ્મને ઉકેલી શકીએ ? અને જો આ શક્ય હોય તો કેવી રીતે બને? આપણે આ પ્રશ્નોના જવાબ ભૌમિતિક દૃષ્ટિકોણથી આપવા પ્રયત્ન કરીશું.

આપણે પહેલાનાં ઉદાહરણોને એક પછી એક જોઈએ.

- ઉદાહરણ 1ની પરિસ્થિતિમાં અખિલા ચકડોળમાં કેટલી વાર બેઠી હતી અને કેટલી વાર હૂપલા રમત રમી હતી, તે દર્શાવે છે.

આકૃતિ 3.2 માં તમે નોંધ્યું છે કે, ભૌમિતિક રીતે આ પરિસ્થિતિ (4, 2) માં છેદતી બે રેખાઓ દર્શાવે છે. તેથી બિંદુ (4, 2) એ બંને સમીકરણો $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y = 20$ થી દર્શાવેલી રેખાઓ ઉપર છે અને આ જ એક માત્ર સામાન્ય બિંદુ છે.

આપણે બૈજિક રીત વડે $x = 4$ અને $y = 2$ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલો છે તેમ ચકાસીએ. દરેક સમીકરણમાં x અને y નાં મૂલ્યોને મૂકતાં, આપણને $4 - 2 \times 2 = 0$ અને $3(4) + 4(2) = 20$ મળે. તેથી આપણે $x = 4$, $y = 2$ એ બે સમીકરણોના ઉકેલ છે તેમ ચકાસ્યું. બંને રેખાઓનું એક માત્ર સામાન્ય બિંદુ (4, 2) છે. આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો એક અને માત્ર એક ઉકેલ છે.

આમ, અખિલા 4 વખત ચકડોળમાં બેસે છે અને 2 વખત હૂપલા રમત રમે છે.

ઉદાહરણ 2 ની પરિસ્થિતિમાં એક પેન્સિલની કિંમત અને એક રબરની કિંમત કેવી રીતે શોધી શકાય ?

આકૃતિ 3.3 માં પરિસ્થિતિનું ભૌમિતિક નિરૂપણ સંપાતી રેખાઓની જોડ દ્વારા દર્શાવ્યું છે. તે સમીકરણોના ઉકેલો આ રેખાઓનાં સામાન્ય બિંદુ છે.

શું આ રેખાઓ પર કોઈ સામાન્ય બિંદુઓ છે ? આલેખ પરથી આપણે અવલોકન કરીએ કે રેખા પરનું દરેક બિંદુ એ બંને સમીકરણોનો સામાન્ય ઉકેલ છે. તેથી સમીકરણો $2x + 3y = 9$ અને $4x + 6y = 18$ ના ઉકેલોની સંખ્યા અનંત છે. આપણને તે આશ્ચર્ય પમાડતું નથી, કારણ કે, સમીકરણ $4x + 6y = 18$ ને 2 વડે ભાગવાથી આપણને $2x + 3y = 9$ મળશે. તે સમીકરણ (1) જ છે. તેથી, બંને સમીકરણો સમકક્ષ છે. આલેખ પરથી રેખાના દરેક બિંદુ પરથી આપણને પેન્સિલ અને રબરની કિંમત મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિંમત અનુક્રમે ₹ 3 અને ₹ 1 છે તેમ કહી શકાય. અથવા એક પેન્સિલની કિંમત ₹ 3.75 અને એક રબરની કિંમત ₹ 0.50 અને આમ $2x + 3y = 9$ નું સમાધાન કરતાં અસંખ્ય x અને y મળે.

ઉદાહરણ 3 ની પરિસ્થિતિમાં શું તે રેલવેના પાટા એકબીજાને છેદી શકે છે ?

આકૃતિ 3.4 માં, બે સમાંતર રેખાઓ ભૌમિતિક રીતે રજૂ કરવામાં આવેલી છે. રેખાઓ એકબીજાને છેદતી નથી. તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી. આનો અર્થ એ પણ થાય છે કે, બે સમીકરણોને સામાન્ય ઉકેલ નથી.

જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ ન હોય તેવું સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી તેમ કહેવાય. જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ હોય તેવું સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય. જે દ્વિચલ સુરેખ

સમીકરણયુગ્મનાં બંને સમીકરણો સમાન હોય તેને અનંત ભિન્ન ઉકેલો હોય. આવા સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી સમીકરણો છે તેમ કહેવાય. સ્પષ્ટ છે કે જે સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી હોય તે સમીકરણો સુસંગત હોય છે જ.

સારાંશમાં આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રેખાઓનું નિરૂપણ અને ઉકેલના અસ્તિત્વ વિશે નીચે પ્રમાણે કહી શકીએ :

(i) રેખાઓ એક જ બિંદુમાં છેદી શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોની જોડીને એક (અનન્ય) ઉકેલ છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ)

(ii) રેખાઓ સમાંતર હોઈ શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને કોઈ ઉકેલ નથી. (સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.)

(iii) રેખાઓ સંપાતી છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને અનંત ઉકેલો છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ, અવલંબી સમીકરણો)

ચાલો આપણે ઉદાહરણ 1, 2 અને 3 તરફ પાછા વળીએ અને ભૌમિતિક રીતે સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કેવું રેખાયુગ્મ દર્શાવે છે તે નોંધીએ.

(i) $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y - 20 = 0$ (રેખાઓ છેદે છે.)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ અને $4x + 6y - 18 = 0$ (રેખાઓ સંપાતી છે.)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ (રેખાઓ સમાંતર છે.)

હવે આપણે ત્રણે ઉદાહરણની $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમતો લખીએ અને તમામને સરખાવીએ.

અહીંયા a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 એ વિભાગ 3.2 માં આવેલા પ્રમાણિત સ્વરૂપનાં સમીકરણોના સહગુણકો છે.

કોષ્ટક 3.4

ક્રમ નં.	રેખાઓની જોડ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	ગુણોત્તરોની સરખામણી	આલેખાત્મક સ્વરૂપ	બૈજિક સ્વરૂપ
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	છેદતી રેખાઓ	માત્ર એક ઉકેલ (અનન્ય)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	સંપાતી રેખાઓ	અનંત ઉકેલો
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ એટલે કે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અને $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$	સમાંતર રેખાઓ	ઉકેલ નથી.

ઉપરના કોષ્ટકમાંથી, તમે જોઈ શકો છો કે જો સમીકરણો

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ*

(i) છેદતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) સંપાતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) સમાંતર હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

વાસ્તવમાં કોઈ પણ રેખાઓની જોડ માટે તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તમે તમારી જાતે પણ કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરી ઉપરની ચકાસણી કરી શકો છો.

આપણે હવે વધુ ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 4 : સમીકરણયુગ્મ

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

સુસંગત છે કે નહિ તે ચકાસો. જો સુસંગત હોય તો આલેખની મદદથી ઉકેલો.

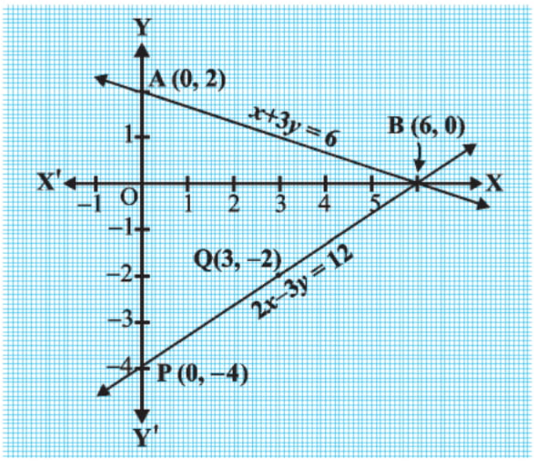
ઉકેલ : સમીકરણો (1) અને (2) ના આલેખ દોરીએ. આ માટે આપણે દરેક સમીકરણના બબ્બે ઉકેલ શોધીશું. (કોષ્ટક 3.5માં દર્શાવેલ)

કોષ્ટક 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	–4	–2

આલેખપત્ર ઉપર બિંદુઓ A(0, 2), B(6, 0), P(0, –4) અને Q (3, –2) દર્શાવો. આકૃતિ 3.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને જોડતી રેખાઓ AB અને PQ દોરો.



આકૃતિ 3.5

આપણે નોંધીએ કે, બિંદુ B(6, 0) એ બંને રેખાઓ AB અને PQ ઉપરનું સામાન્ય બિંદુ છે. તેથી, સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ $x = 6$ અને $y = 0$ છે. આથી, આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

ઉદાહરણ 5 : આલેખની રીતથી નીચેના સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ નથી, અનન્ય ઉકેલ છે અથવા અનંત ઉકેલો છે તે નક્કી કરો.

$$5x - 8y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \quad (2)$$

ઉકેલ : સમીકરણ (2) ને $\frac{5}{3}$ વડે ગુણતાં, આપણને

$5x - 8y + 1 = 0$ મળશે.

તે, સમીકરણ (1) ને સમાન છે. સમીકરણો (1) અને (2) દર્શાવતી રેખાઓ સંપાતી છે તેમ તેમનું નિરૂપણ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે.

આલેખ પર કેટલાંક બિંદુઓ દર્શાવો અને જાતે ચકાસો.

ઉદાહરણ 6 : ચંપા 'સેલ' માં કેટલાંક પેન્ટ અને સ્કર્ટ ખરીદવા ગઈ હતી. જ્યારે તેને તેના મિત્રોએ પૂછ્યું કે, તેણે દરેકની કેટલી સંખ્યાની ખરીદી કરી હતી, ત્યારે તેણે જવાબ આપ્યો, ''પેન્ટની સંખ્યાના બે ગણામાંથી બે ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યાં. પણ પેન્ટની સંખ્યાના ચાર ગણામાંથી ચાર ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યા.'' ચંપાએ કેટલી સંખ્યામાં પેન્ટ અને કેટલી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યાં તે શોધવા તેના મિત્રોને મદદ કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, ચંપાએ x પેન્ટ તથા y સ્કર્ટ ખરીદ્યા છે. આથી આપેલ માહિતી પરથી સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે :

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

અને

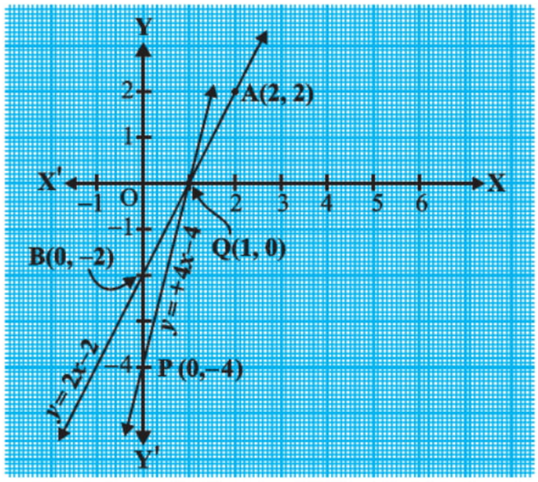
$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ના બે-બે ઉકેલોની મદદથી આલેખપત્ર પર આલેખ દોરો. કોષ્ટક 3.6 માં તેમના ઉકેલો આપેલા છે.

કોષ્ટક 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	–2

x	0	1
$y = 4x - 4$	–4	0



આકૃતિ 3.6

આકૃતિ 3.6 માં A(2, 2) તથા B(0, –2) માંથી પસાર થતી રેખા AB તથા P(0, –4) અને Q(1, 0) માંથી પસાર થતી રેખા PQ દોરો. સમીકરણોના ઉકેલ સમાવતાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાઓ દર્શાવો. તે બે રેખાઓ બિંદુ (1, 0) આગળ છેદે છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 0$ એ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ થશે. એટલે કે તે 1 પેન્ટ ખરીદે છે અને સ્કર્ટ ખરીદતી નથી.

ચકાસો : તમારો જવાબ આપેલા કૂટપ્રશ્નોની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેની સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમનો ઉકેલ આલેખની રીતે શોધો.

(i) ધોરણ X ના દસ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતના કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લે છે. જો ભાગ લેનાર છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓની સંખ્યા કરતાં 4 વધારે હોય, તો કેટલાં છોકરાઓએ અને કેટલી છોકરીઓએ કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લીધો હશે તે શોધો.

(ii) 5 પેન્સિલ અને 7 પેનની કુલ કિંમત ₹ 50 છે અને તે જ કિંમતવાળી 7 પેન્સિલ તથા 5 પેનની કુલ કિંમત ₹ 46 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક પેનની કિંમત શોધો.

2. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મથી બનતી રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે છે કે સમાંતર છે અથવા સંપાતી છે, તેમ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ગુણોત્તરોની તુલના કરીને નક્કી કરો :

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે ગુણોત્તર $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમત પરથી નક્કી કરો :

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. નીચેના પૈકી કયું સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે જણાવો. જો તે સુસંગત હોય, તો ભૌમિતિક રીતે ઉકેલ શોધો :

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. એક લંબચોરસ બગીચાની અર્ધપરિમિતિ 36 મીટર છે તથા તેની લંબાઈ એ તેની પહોળાઈ કરતાં 4 મીટર વધુ છે, તો બગીચાની બાજુઓનાં માપ શોધો.

6. સુરેખ સમીકરણ $2x + 3y - 8 = 0$ આપેલ છે. એવું બીજું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો કે જેથી બનતી જોડીનું ભૌમિતિક નિરૂપણ નીચે પ્રમાણે હોય :

(i) છેદતી રેખાઓ (ii) સમાંતર રેખાઓ (iii) સંપાતી રેખાઓ

7. સમીકરણો $x - y + 1 = 0$ અને $3x + 2y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને x-અક્ષ દ્વારા રચાયેલા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ દર્શાવો અને બનતા ત્રિકોણાકાર પ્રદેશને છાયાંકિત કરો.

3.4 સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવાની બૈજિક રીત

આગળના વિભાગમાં આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આલેખની રીત વિશે ચર્ચા કરી ગયાં. આલેખ પર $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ જેવાં પૂર્ણાંક ન હોય તેવા યામ ધરાવતાં બિંદુઓ આવતાં હોય ત્યારે આ રીત અનુકૂળ નથી. આવાં બિંદુઓ (આલેખપત્ર પર) આલેખવામાં ભૂલ થવાની શક્યતાઓ રહે છે. શું આવા યુગ્મનો ઉકેલ શોધવાની મુશ્કેલી દૂર કરવા બીજી કોઈ અન્ય રીતો છે ? આના માટે ઘણી બૈજિક રીતો છે. હવે આપણે, કેટલીક બૈજિક રીતો દ્વારા ઉકેલ શોધવાની ચર્ચા કરીશું.

Z8G1E6

3.4.1 આદેશની રીત : કેટલાંક ઉદાહરણોની મદદથી આપણે આદેશની રીતની ચર્ચા કરીશું.

ઉદાહરણ 7 : આદેશની રીતનો ઉપયોગ કરી, નીચે આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવો :

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

ઉકેલ :

સોપાન 1 : આ રીતમાં કોઈ પણ એક સમીકરણમાંથી એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવવામાં આવે છે.

ધારો કે સમીકરણ (2) લઈએ.

$$x + 2y = 3 \quad \text{ને}$$
$$x = 3 - 2y \quad \text{તરીકે લો.} \qquad (3)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (1) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$\therefore 21 - 14y - 15y = 2$$

$$\therefore -29y = -19$$

$$\therefore y = \frac{19}{29}$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (3) માં y ની કિંમત મૂકતાં,

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

$\therefore$ ઉકેલ $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$ મળે.

ચકાસણી : તમે બંને સમીકરણોમાં $x = \frac{49}{29}$ અને $y = \frac{19}{29}$ મૂકશો તો જણાશે કે બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

આદેશની રીતને વધુ સ્પષ્ટ રીતે સમજવા માટે નીચેનાં સોપાનો દ્વારા તેનો વિચાર કરીએ.

સોપાન 1 : અનુકૂળ હોય તે રીતે એક સમીકરણ પરથી એક ચલ, ઉદાહરણ તરીકે, y ને બીજા ચલ x ના સ્વરૂપમાં મેળવો.

સોપાન 2 : આ સિવાયના સમીકરણમાં y ની કિંમત મૂકતાં, સમીકરણ એક ચલ x ના સ્વરૂપમાં મળશે અને આપણે તેને ઉકેલી શકીશું.

કેટલીક વખત ઉદાહરણ 9 અને ઉદાહરણ 10 ની જેમ તમે ચલ વિનાનું વિધાન મેળવો તે શક્ય છે. જો આ વિધાન સત્ય હોય તો તમે અનુમાન કરી શકો કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો છે. જો આ વિધાન અસત્ય હોય તો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

સોપાન 3 : સોપાન 1 ની મદદથી બીજા ચલ x ની કિંમતને સોપાન 2 ના સમીકરણમાં મૂકતાં ચલ y (અથવા x) ની કિંમત મળશે.

નોંધ : ***આપણે એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવીને સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવીએ છીએ. તેથી ઉકેલ મેળવવાની આ રીત આદેશની રીત તરીકે ઓળખાય છે.***

ઉદાહરણ 8 : સ્વાધ્યાય 3.1નો પ્રશ્ન નંબર 1 આદેશની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે આફતાબ અને તેની પુત્રીની વર્તમાન ઉંમર (વર્ષમાં) અનુક્રમે s અને t છે. આપેલ માહિતી પરથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને આ પરિસ્થિતિમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$s - 7 = 7(t - 7)$, એટલે કે $s - 7t + 42 = 0$ (1) અને

$s + 3 = 3(t + 3)$, એટલે કે $s - 3t = 6$ (2)

સમીકરણ (2)નો ઉપયોગ કરતાં, $s = 3t + 6$ મળે છે. s ની આ કિંમત સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$$

$$\therefore 4t = 48$$

તેથી $t = 12$.

સમીકરણ (2)માં t ની કિંમત મૂકતાં, આપણને

$s = 3(12) + 6 = 42$ મળે.

તેથી, આફતાબ અને તેની પુત્રીની ઉંમર અનુક્રમે 42 વર્ષ અને 12 વર્ષ છે.

આ સમસ્યા માટે આ ઉકેલ સમીકરણોમાં મૂકી સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તેમ ચકાસી શકાય છે.

ઉદાહરણ 9 : વિભાગ 3.3 માંથી ઉદાહરણ 2 પરથી, 2 પેન્સિલો અને 3 રબરની કિંમત ₹ 9 છે અને 4 પેન્સિલોની અને 6 રબરની કિંમત ₹ 18 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$
$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

આપણે પ્રથમ ચલ x ની કિંમત y ના સ્વરૂપમાં દર્શાવતાં,

સમીકરણ $2x + 3y = 9$ માંથી $x = \frac{9-3y}{2}$ મળે છે. (3)

સમીકરણ (2) માં, x ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{4(9-3y)}{2} + 6y = 18$$
$$\therefore\ 18 - 6y + 6y = 18$$
$$\therefore\ 18 = 18$$

આ વિધાન y ની તમામ કિંમતો માટે સત્ય છે. આપણને y ની કોઈ નિશ્ચિત કિંમત ઉકેલ સ્વરૂપે મળતી નથી. તેથી આપણને x ની નિશ્ચિત કિંમત પણ મળતી નથી. આ પરિસ્થિતિ ઊભી થાય છે, કારણ કે બંને સમીકરણો સમાન છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે. આપણે નોંધીએ કે આલેખની રીતે પણ સમાન ઉકેલો મળે છે. (વિભાગ 3.2માં આકૃતિ 3.3 અનુસાર) આપણે એક પેન્સિલ અને એક રબરની અનન્ય કિંમત શોધી શકતા નથી, કારણ આ પરિસ્થિતિમાં તેને ઘણા સમાન ઉકેલો મળે છે.

ઉદાહરણ 10 : વિભાગ 3.2 ના ઉદાહરણ 3 નો વિચાર કરીએ. શું રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદશે ?

ઉકેલ : દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$
$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી x ને y ના સ્વરૂપમાં સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$x = 4 - 2y$$

હવે, સમીકરણ (2) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$
$$\therefore\ 8 - 12 = 0$$
$$\therefore\ -4 = 0$$

આ વિધાન અસત્ય છે.

તેથી સમીકરણોને એક પણ સામાન્ય ઉકેલ નથી, તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. નીચેના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$
$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$
$\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ અને $2x - 4y = -24$ નો ઉકેલ શોધો અને એવો 'm' શોધો કે જેથી $y = mx + 3$ થાય.

3. નીચેની સમસ્યા ઉપરથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને તેમનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

(i) બે સંખ્યાનો તફાવત 26 છે અને એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી ત્રણ ગણી છે, તો તે બે સંખ્યા શોધો.

(ii) બે પૂરકકોણો પૈકી મોટો ખૂણો નાના ખૂણા કરતાં $18°$ મોટો હોય, તો તે પૂરકકોણો શોધો.

(iii) ક્રિકેટ ટીમના કોચે 7 બૅટ અને 6 દડાઓ ₹ 3800માં ખરીદ્યા. પછીથી તેણે તે જ કિંમતવાળા 3 બૅટ અને 5 દડાઓ ₹ 1750 માં ખરીદ્યાં. તો એક બૅટની કિંમત અને એક દડાની કિંમત શોધો.

(iv) એક શહેરમાં ટૅક્સીનું ભાડું નિશ્ચિત ભાડા અને અંતરના પ્રમાણમાં સંયુક્ત રીતે લેવાય છે. 10 કિમીના અંતર માટે ₹ 105 અને 15 કિમીની મુસાફરી માટે ₹ 155 ની ચુકવણી કરવી પડે છે. તો નિશ્ચિત ભાડું કેટલું અને પ્રતિ કિમી કેટલા દરે કિંમત ચૂકવી પડે ? મુસાફરે 25 કિમીની મુસાફરી માટે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડશે ?

(v) એક અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 2 ઉમેરતાં તે $\frac{9}{11}$ બને છે. જો અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 3 ઉમેરતાં તે $\frac{5}{6}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(vi) પાંચ વર્ષ પછી જેકબની ઉંમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉંમર (વર્ષમાં) કરતાં ત્રણ ગણી હશે. પાંચ વર્ષ પહેલાં, જેકબની ઉંમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉંમરથી સાત ગણી હોય, તો તેમની વર્તમાન ઉંમર શોધો ?

3.4.2 લોપની રીત :

G9Z1C7

હવે, આપણે એક અન્ય રીતમાં એક ચલનો લોપ (દૂર કરીને) કરવાની રીતનો વિચાર કરીશું. આ રીત આદેશની રીત કરતાં કેટલીક વાર વધારે અનુકૂળ રીત પડે છે. આપણે આ રીત કેવી રીતે કામ કરે છે તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 11 : બે વ્યક્તિની માસિક આવકનો ગુણોત્તર 9:7 છે અને તેમના માસિક ખર્ચનો ગુણોત્તર 4:3 છે. જો દરેક વ્યક્તિ માસિક ₹ 2000 ની બચત કરે, તો તેમની માસિક આવક શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે વ્યક્તિની આવક અનુક્રમે ₹ $9x$ અને ₹ $7x$ છે અને તેમનો ખર્ચ અનુક્રમે ₹ $4y$ અને ₹ $3y$ છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવતાં સમીકરણો આ પ્રમાણે છે :

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

અને $$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને 3 વડે ગુણતાં અને સમીકરણ (2) ને 4 વડે ગુણતાં y ના સહગુણકો સમાન બનશે.

આપણને સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (4) માંથી સમીકરણ (3) બાદ કરતાં, y નો લોપ થશે, કારણ કે y ના સહગુણકો સરખા છે.

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$
$$\therefore x = 2000$$

સોપાન 3 : સમીકરણ (1) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

$$9(2000) - 4y = 2000$$
$$\therefore y = 4000$$

તેથી, સમીકરણોના ઉકેલ $x = 2000$, $y = 4000$ છે તેથી બંને વ્યક્તિઓની માસિક આવક અનુક્રમે ₹ 18,000 અને ₹ 14,000 છે.

ચકાસણી : 18000 : 14000 = 9 : 7

અને તેમના ખર્ચનો ગુણોત્તર = (18000 – 2000) : (14000 – 2000) = 16000 : 12000 = 4 : 3 મળશે.

નોંધ :

1. ***ઉપરના ઉદાહરણમાં ઉકેલ મેળવવા માટે વપરાયેલ પદ્ધતિને 'લોપની રીત' કહેવામાં આવે છે, કારણ કે આપણે પ્રથમ એક ચલનો લોપ કરીને એક ચલનું સુરેખ સમીકરણ મેળવીએ છીએ. ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે y નો લોપ કર્યો હતો. આપણે x નો લોપ પણ કરી શકીએ.***
   તે રીતનો પ્રયત્ન જાતે કરો.
2. ***તમે આ સમસ્યાનો ઉકેલ શોધવા આદેશની રીત અથવા આલેખની રીતનો પણ ઉપયોગ કરી શક્યા હોત.***
   આમ કરતા જ રહો અને જુઓ કે કઈ રીત વધુ સાનુકૂળ છે.

આપણે લોપની રીતનાં સોપાનોને નીચે પ્રમાણે નોંધીશું :

સોપાન 1 : સૌપ્રથમ બંને સમીકરણોને કોઈ યોગ્ય શૂન્યેતર અચળ સંખ્યાઓ વડે ગુણવાથી (x અથવા y પૈકી કોઈ એકના સહગુણક) એક ચલના સહગુણકો સમાન થાય.

સોપાન 2 : ત્યાર બાદ એક સમીકરણમાં બીજું સમીકરણ ઉમેરો અથવા એક સમીકરણમાંથી બીજું સમીકરણ બાદ કરતાં એક ચલનો લોપ થશે. જો તમને એક ચલનું સમીકરણ મળે તો સોપાન 3 પર જાઓ.

સોપાન 2 માં, આપણને ચલ ન હોય તેવું સત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળશે.

સોપાન 2 માં, આપણને ચલ ન હોય તેવું અસત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. એટલે કે તે સુસંગત નથી.

સોપાન 3 : એક ચલ સુરેખ સમીકરણ ઉકેલતાં આપણને (x અથવા y) કોઈ એક ચલની કિંમત મળે.

સોપાન 4 : મૂળ સમીકરણ પૈકીના કોઈ એક સમીકરણમાં x (અથવા y)ની કિંમત મૂકતાં આપણને બીજા ચલની કિંમત મળે છે.

હવે, તે સમજવા માટે આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો ઉકેલીશું.

ઉદાહરણ 12 : નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મના શક્ય ઉકેલો લોપની રીતનો ઉપયોગ કરી શોધો :

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$
$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

ઉકેલ :

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને 2 વડે અને સમીકરણ (2) ને 1 વડે ગુણતાં x ના સહગુણકો સમાન મળશે. આપણને સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે.

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$\therefore\ (4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$

$\therefore\ 0 = 9$. આ અસત્ય વિધાન છે.

તેથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી.

ઉદાહરણ 13 : બે અંકોની એક સંખ્યા અને તે સંખ્યાના અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યાનો સરવાળો 66 છે. જો તે સંખ્યાના અંકોનો તફાવત 2 હોય, તો તે સંખ્યા શોધો. આવી કેટલી સંખ્યાઓ છે ?

ઉકેલ : ધારો કે બે અંકોની પ્રથમ સંખ્યાના દશકનો અંક અને એકમનો અંક અનુક્રમે x અને y છે.

તેથી પ્રથમ સંખ્યા દશાંશ રૂપમાં $10x + y$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે $56 = 10\,(5) + 6$)

જ્યારે અંકોની અદલાબદલી કરતાં x એ એકમનો અંક અને y દશકનો અંક બનશે. આ સંખ્યાનું દશાંશ સ્વરૂપ $10y + x$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે 56 ના અંકોની અદલાબદલી પછીનું સ્વરૂપ $65 = 10\,(6) + 5$)

આપેલ શરત અનુસાર,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

$$\therefore\ 11(x + y) = 66$$

$$\therefore\ x + y = 6 \quad (1)$$

આપણને આપેલ છે કે તે સંખ્યાના બે અંકોનો તફાવત 2 છે.

$$\therefore\quad x - y = 2 \quad (2)$$

અથવા $y - x = 2$ (3)

જો $x - y = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (2) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 4$ અને $y = 2$ મળે. આ સ્થિતિમાં આપણને માંગેલ સંખ્યા 42 મળે.

જો $y - x = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (3) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 2$ અને $y = 4$ મળે.

આ સ્થિતિમાં, આપણને માંગેલ સંખ્યા 24 મળે.

આમ, આપણને બે સંખ્યાઓ 42 અને 24 માંગ્યા પ્રમાણે મળે છે.

ચકાસણી : અહીં $42 + 24 = 66$ અને $4 - 2 = 2$ તથા $24 + 42 = 66$ અને $4 - 2 = 2$ મળે છે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ લોપની રીતે અને આદેશની રીતે શોધો :

   (i) $x + y = 5$ અને $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ અને $2x - 2y = 2$

   (iii) $3x - 5y - 4 = 0$ અને $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ અને $x - \frac{y}{3} = 3$

2. આપેલી સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમના ઉકેલો (જો શક્ય હોય તો) લોપની રીતે શોધો :

(i) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાં 1 ઉમેરતાં અને છેદમાંથી 1 બાદ કરતાં અપૂર્ણાંક કિંમત અતિસંક્ષિપ્તરૂપમાં 1 બને છે. જો માત્ર છેદમાં 1 ઉમેરતાં અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{2}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(ii) પાંચ વર્ષ પહેલાં, નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી ત્રણ ગણી હતી. દસ વર્ષ પછી નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી બે ગણી થશે, તો નૂરી અને સોનુની વર્તમાન ઉંમર કેટલી થશે ?

(iii) બે અંકોની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. વળી સંખ્યાના નવ ગણા કરતાં મળતી સંખ્યા એ અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યા કરતાં બે ગણી છે, તો તે સંખ્યા શોધો.

(iv) મીના ₹ 2000 ઉપાડવા બૅન્કમાં ગઈ હતી. તેણે કૅશિયરને કહ્યું હતું કે મને માત્ર ₹ 50 અને ₹ 100 ની નોટો જ જોઈએ છે. મીનાને કુલ 25 નોટો મળી હતી. તો તેણે ₹ 50 અને ₹ 100 ની પ્રત્યેકની કેટલી કેટલી નોટો મેળવી હશે ?

(v) એક પ્રતિષ્ઠિત પુસ્તકાલય પ્રથમ ત્રણ દિવસનું એક પુસ્તકનું નિશ્ચિત ભાડું લે છે અને પછીના પ્રત્યેક દિવસ દીઠ અતિરિક્ત ભાડું લે છે. સરિતા સાત દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 27 ચૂકવે છે. સુસી પાંચ દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 21 ચૂકવે છે, તો નિશ્ચિત ભાડું અને પ્રત્યેક વધારાના દિવસનું ભાડું શોધો.

3.4.3 ચોકડી ગુણાકારની રીત :

B3H2T8

અત્યાર સુધી તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આલેખની રીતે, આદેશની રીતે અને લોપની રીતે કેવી રીતે મેળવવો તે શીખ્યાં.

હવે આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની એક વધુ બૈજિક રીતનો પરિચય મેળવીશું. ઘણા બધાં કારણોસર સમીકરણોના ઉકેલ માટે આ રીત ઉપયોગી છે. આગળ વધતાં પહેલાં આપણે નીચેની પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

જો 5 નારંગી અને 3 સફરજનની કિંમત ₹ 35 અને 2 નારંગી અને 4 સફરજનની કિંમત ₹ 28 હોય, તો આપણે એક નારંગી અને એક સફરજનની કિંમત શોધીએ.

ધારો કે એક નારંગીની કિંમત ₹ x અને એક સફરજનની કિંમત ₹ y છે. તેથી આપણને આ પ્રમાણે સમીકરણ મળે.

$$5x + 3y = 35, \text{ એટલે કે } 5x + 3y - 35 = 0 \tag{1}$$

$$2x + 4y = 28, \text{ એટલે કે } 2x + 4y - 28 = 0 \tag{2}$$

આપણે, આ સમીકરણોનો ઉકેલ લોપની રીતથી મેળવીએ.

સમીકરણ (1) ને 4 વડે ગુણો અને સમીકરણ (2) ને 3 વડે ગુણો,

જેથી, $$(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \tag{3}$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \tag{4}$$

સમીકરણ (3)માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં

$$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$$

$$\therefore\ x = \frac{-\,[(4)(-35) - 3(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$$

$$\therefore\ x = \frac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)} \tag{5}$$

જો સમીકરણ (1) અને (2)ને $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, વડે દર્શાવીએ તો, આપણને $a_1 = 5$, $b_1 = 3$, $c_1 = -35$, $a_2 = 2$, $b_2 = 4$, $c_2 = -28$ મળે. તેથી,

સમીકરણ (5) ને $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ તરીકે લખી શકાય.

તે જ રીતે, તમને $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ મળી શકે.

સમીકરણ (5) નું સાદું રૂપ આપતાં, આપણને

$$x = \frac{-84+140}{20-6} = 4$$

તે જ રીતે, $y = \frac{(-35)(2)-(5)(-28)}{20-6} = \frac{-70+140}{14} = 5$

તેથી $x = 4$, $y = 5$ એ આપેલ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ છે.

તેથી એક નારંગીની કિંમત ₹ 4 અને એક સફરજનની કિંમત ₹ 5 છે.

ચકાસણી : 5 નારંગીની કિંમત + 3 સફરજનની કિંમત = ₹ 20 + ₹ 15 = ₹ 35.

2 નારંગીની કિંમત + 4 સફરજનની કિંમત = ₹ 8 + ₹ 20 = ₹ 28.

ચાલો આપણે જોઈએ કે આ પદ્ધતિ કોઈ પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ માટે કેવી રીતે ઉપયોગી છે.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ઉપરનાં સમીકરણોમાંથી x અને y ની કિંમત મેળવવા માટે આપણે નીચે પ્રમાણેનાં સોપાનોને અનુસરીશું :

સોપાન 1 : સમીકરણ (1) ને b_2 વડે અને સમીકરણ (2) ને b_1 વડે ગુણતાં,

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2\,y + b_1c_2 = 0 \text{ મળે.} \quad (4)$$

સોપાન 2 : સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં, આપણને,

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x + (b_2b_1 - b_1b_2)\,y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

$$\therefore\ (b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1$$

તેથી, $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, જ્યાં, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (5)

સોપાન 3 : સમીકરણ (1) અથવા (2) માં x ની કિંમત મૂકતાં,

આપણને, $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ મળશે. (6)

હવે, આપણને બે વિકલ્પો મળશે.

વિકલ્પ 1 : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. આ પરિસ્થિતિમાં, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$,

તેથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળે.

વિકલ્પ 2 : જો $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, તો આપણે $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ લખીએ, તો

$a_1 = k\, a_2$, $b_1 = k\, b_2$ થશે.

સમીકરણ (1) માં a_1 અને b_1 ની કિંમતો મૂકતાં, આપણને

$k\,(a_2x + b_2y) + c_1 = 0$ મળશે. (7)

સમીકરણ (7) અને (2) બંને સમીકરણોનું સમાધાન માત્ર $c_1 = kc_2$, એટલે કે $\frac{c_1}{c_2} = k$ માટે થાય છે તેમ અવલોકન કરી શકાય.

જો $c_1 = kc_2$, તો સમીકરણ (2) નો કોઈ પણ ઉકેલ સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરશે અને તેથી ઊલટું પણ શક્ય છે.

તેથી, જો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ તો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ યુગ્મ (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલો છે.

જો $c_1 \neq kc_2$, તો સમીકરણ (2) માટેનો કોઈ પણ ઉકેલ સમીકરણ (1) નું સમાધાન નહિ કરે અને તેથી ઊલટું પણ શક્ય છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ (1) અને (2) ની ઉપર્યુક્ત ચર્ચાને સંક્ષિપ્તમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

(i) જ્યારે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ત્યારે આપણને અનન્ય ઉકેલ મળે છે.

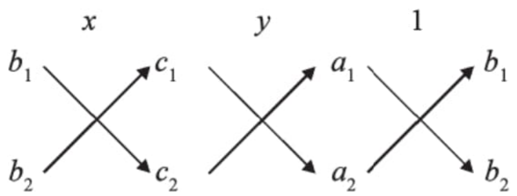
(ii) જ્યારે, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ત્યારે અનંત ઉકેલો મળે છે.

(iii) જ્યારે, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અને $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ત્યારે ઉકેલ નથી.

સમીકરણ (5) અને (6) ના ઉકેલોને તમે નીચે પ્રમાણે પણ નોંધી શકો :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (8)$$

ઉપરના પરિણામ યાદ રાખવા નીચે પ્રમાણેની આકૃતિ તમને ઉપયોગી થશે :



બે સંખ્યાઓ વચ્ચેના તીર પરથી સંકેત મળે છે કે, તેમનો ગુણાકાર કરવાનો છે અને પ્રથમ ગુણાકારથી પ્રાપ્ત સંખ્યામાંથી બીજા ગુણાકારથી પ્રાપ્ત સંખ્યા બાદ કરવાની છે.

આ પદ્ધતિથી સુરેખ સમીકરણ યુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આપણે આગળ પ્રમાણેનાં સોપાનોને અનુસરીશું.

સોપાન 1 : આપેલાં સમીકરણોને (1) અને (2) સ્વરૂપમાં લખો.

સોપાન 2 : ઉપરની આકૃતિનો ઉપયોગ કરી (8) માં બતાવ્યા પ્રમાણે સમીકરણો લખો.

સોપાન 3 : જો $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, તો x અને y શોધો.

સોપાન 2 પરથી આપણે કહી શકીએ કે, આ પદ્ધતિને શા માટે **ચોકડી ગુણાકારની રીત** કહેવામાં આવે છે.

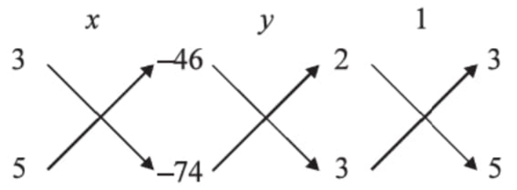
ઉદાહરણ 14 : જો આપણે બૅંગ્લોરના એક બસ સ્ટૅન્ડથી મલ્લેશ્વરમ્‌ની 2 ટિકિટ અને યશવંતપુરની 3 ટીકીટો ₹ 46 માં ખરીદી શકીએ. પરંતુ જો આપણે મલ્લેશ્વરમની 3 ટિકિટો અને યશવંતપુરની 5 ટિકિટો ₹ 74 માં મળે તો, બસ સ્ટૅન્ડથી મલ્લેશ્વરમ્ અને યશવંતપુરનું ભાડું શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બૅંગ્લોરથી મલ્લેશ્વરમ્ સુધીનું ભાડું ₹ x છે અને યશવંતપુરનું ભાડું ₹ y છે. આપેલી માહિતી અનુસાર આપણને નીચે પ્રમાણે સમીકરણો મળશે :

$2x + 3y = 46$, તેથી, $2x + 3y - 46 = 0$ (1)

$3x + 5y = 74$, તેથી, $3x + 5y - 74 = 0$ (2)

ચોકડી ગુણાકારની રીતથી સમીકરણના ઉકેલો મેળવવા આપણે નીચે પ્રમાણે આકૃતિ દોરીએ :



તેથી, $\dfrac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \dfrac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \dfrac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$

$\dfrac{x}{-222+230} = \dfrac{y}{-138+148} = \dfrac{1}{10-9}$

$\therefore \dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{10} = \dfrac{1}{1}$

$\therefore \dfrac{x}{8} = 1$ અને $\dfrac{y}{10} = 1$

$\therefore x = 8$ અને $y = 10$

તેથી, બૅંગ્લોરથી મલ્લેશ્વરમ્‌નું ભાડું ₹ 8 અને બૅંગ્લોરથી યશવંતપુરનું ભાડું ₹ 10 છે.

ચકાસણી : તમે ચકાસી શકો છો કે, આપણે શોધેલો સમસ્યાનો ઉકેલ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 15 : p ની કઈ કિંમતથી નીચે આપેલ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ અનન્ય મળે ?

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

ઉકેલ : અહીં, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$

હવે, સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે. માટે $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ આવશ્યક છે.

$\therefore \dfrac{4}{2} \neq \dfrac{p}{2}$

$\therefore p \neq 4$

તેથી, 4 સિવાયની p ની તમામ કિંમત માટે સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ મળશે.

ઉદાહરણ 16 : k ની કઈ કિંમત માટે નીચે આપેલા સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળે?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$
$$12x + ky - k = 0$$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$

સુરેખ સમીકરણ યુગ્મને અનંત ઉકેલ હોવા માટે : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

આથી $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$.

આમ $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$ થવું જોઈએ.

$k^2 = 36$ મળે છે.

એટલે કે, $k = \pm 6$

$\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$ પણ આવશ્યક છે.

આપણને $3k = k^2 - 3k$, આવશ્યક છે.

એટલે કે, $6k = k^2$. તેનો અર્થ થાય છે કે $k = 0$ અથવા $k = 6$.

તેથી, $k = 6$ માટે સમીકરણયુગ્મના અનંત ઉકેલો માટેની બંને શરતોનું સમાધાન થાય છે. $k = 6$ માટે સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ છે.

સ્વાધ્યાય 3.5

1. નીચેનાં પૈકી કયાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે, ઉકેલ નથી અથવા અનંત ઉકેલ છે તે જણાવો. જો અનન્ય ઉકેલ હોય તો ચોકડી ગુણાકારની રીતે તેનો ઉકેલ શોધો :

(i) $x - 3y - 3 = 0$, $3x - 9y - 2 = 0$

(ii) $2x + y = 5$, $3x + 2y = 8$

(iii) $3x - 5y = 20$, $6x - 10y = 40$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$, $3x - 3y - 15 = 0$

2. (i) નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને a અને b ની કઈ કિંમતો માટે અનંત ઉકેલો છે?

$$2x + 3y = 7$$
$$(a - b)\,x + (a + b)\,y = 3a + b - 2$$

(ii) નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને k ની કઈ કિંમત માટે ઉકેલ ન મળે?

$$3x + y = 1$$
$$(2k - 1)\,x + (k - 1)\,y = 2k + 1$$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે અને ચોકડી ગુણાકારની રીતે શોધો :

$$8x + 5y = 9$$
$$3x + 2y = 4$$

4. નીચેના કૂટપ્રશ્નોમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને કોઈ પણ બૈજિક રીતે તેમના ઉકેલ (જો શક્ય હોય તો) શોધો :

(i) એક હોસ્ટેલના વિદ્યાર્થીઓનું ભોજનખર્ચ અંશતઃ અચળ અને અંશતઃ વિદ્યાર્થીઓએ જેટલા દિવસ ભોજન લીધું હોય તે દિવસોની સંખ્યાના પ્રમાણમાં હોય છે. વિદ્યાર્થી A, 20 દિવસ ભોજન લે છે અને તેનું ભોજનખર્ચ ₹ 1000 ચૂકવે છે. વિદ્યાર્થી B, 26 દિવસ ભોજન લે છે અને ભોજનખર્ચ પેટે ₹ 1180 ચૂકવે છે, તો નિશ્ચિત દૈનિકખર્ચ તથા દૈનિક ભોજનખર્ચ શોધો.

(ii) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાંથી 1 બાદ કરવામાં આવે, તો નવા અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{3}$ છે અને તે જ અપૂર્ણાંકના છેદમાં 8 ઉમેરવામાં આવે, તો મળતા અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{4}$ થાય છે, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(iii) યશને એક કસોટીમાં 40 ગુણ મળ્યા હતા. તેને પ્રત્યેક સાચા જવાબના 3 ગુણ મળે છે અને પ્રત્યેક ખોટા જવાબ માટે 1 ગુણ કપાય છે. જો પરીક્ષકે દરેક સત્ય જવાબ માટે 4 ગુણ આપ્યા હોત અને દરેક ખોટા જવાબ માટે 2 ગુણ કાપ્યા હોત, તો યશે 50 ગુણ મેળવ્યા હોત, તો આ કસોટીમાં કેટલા પ્રશ્નો હતા ?

(iv) ધોરીમાર્ગ પર સ્થાન A અને સ્થાન B એકબીજાથી 100 કિમી દૂર છે. એક ગાડી A થી ઊપડે છે અને બીજી ગાડી B થી ઊપડે છે. ગાડીઓ એક જ દિશામાં ભિન્ન, અચળ ઝડપથી ચાલે તો 5 કલાકમાં એકબીજાને મળે છે. તેઓ એકબીજા તરફ ચાલે તો તે 1 કલાકમાં મળે છે, તો બે ગાડીઓની ઝડપ કેટલી હશે?

(v) જો એક લંબચોરસની લંબાઈમાં 5 એકમ ઘટાડો થાય અને પહોળાઈમાં 3 એકમ વધારો થાય, તો લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ 9 ચોરસ એકમ જેટલું ઘટે છે. જો આપણે લંબાઈમાં 3 એકમ અને પહોળાઈમાં 2 એકમ વધારીએ તો ક્ષેત્રફળ 67 ચોરસ એકમ વધે છે. તો લંબચોરસનાં પરિમાણ શોધો.

3.5 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના સ્વરૂપમાં પરિવર્તિત કરી શકાય તેવાં સમીકરણો

H2K5B4

આ વિભાગમાં આપણે સુરેખ ન હોય પરંતુ યોગ્ય આદેશ વડે સુરેખ સમીકરણોમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય એવાં સમીકરણયુગ્મ જોઈશું. આ માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 17 : આપેલા સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ શોધો :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13,$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

ઉકેલ : આપણે સમીકરણયુગ્મને આ રીતે લખીએ,

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \qquad (2)$$

આ સમીકરણો $ax + by + c = 0$ ના સ્વરૂપમાં નથી. હવે સમીકરણ (1) અને (2) માં,

$\frac{1}{x} = p$ અને $\frac{1}{y} = q$ આદેશ લેતાં,

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

તેથી, આપણને સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સ્વરૂપ મળશે.

હવે, આપણે કોઈ પણ પદ્ધતિ દ્વારા આ સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીએ અને તેમ કરતાં $p = 2$, $q = 3$ મળશે.

તમે જાણો છો કે, $p = \frac{1}{x}$ અને $q = \frac{1}{y}$

p અને q ની કિંમત મૂકતાં,

$\frac{1}{x} = 2$ એટલે કે $x = \frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{y} = 3$ એટલે કે $y = \frac{1}{3}$

ચકાસણી : $x = \frac{1}{2}$ અને $y = \frac{1}{3}$ એ આપેલ સમીકરણોમાં મૂકતાં, બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

ઉદાહરણ 18 : નીચેના સમીકરણયુગ્મોને સુરેખ સમીકરણયુગ્મમાં રૂપાંતરિત કરીને ઉકેલો :

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

ઉકેલ : ધારો કે $\frac{1}{x-1} = p$ અને $\frac{1}{y-2} = q$.

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \quad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \quad (2)$$

રૂપાંતરિત સમીકરણો $\quad 5p + q = 2 \quad (3)$

$6p - 3q = 1 \quad (4)$

સમીકરણ (3) અને (4) સુરેખ સમીકરણયુગ્મના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે. હવે, તમે કોઈ પણ પદ્ધતિ દ્વારા આ સમીકરણો ઉકેલી શકો. ઉકેલતાં આપણને $p = \frac{1}{3}$ અને $q = \frac{1}{3}$ મળશે.

હવે p માટે $\frac{1}{x-1}$ મૂકતાં, $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$ મળે.

$\therefore x - 1 = 3$ એટલે કે $x = 4$

તે જ રીતે q માટે $\frac{1}{y-2}$ મૂકતાં, $\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$

$\therefore y - 2 = 3$ એટલે કે $y = 5$

$x = 4, y = 5$ એ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ છે.

ચકાસણી : સમીકરણ (1) અને (2) માં $x = 4$ અને $y = 5$ મૂકી જોતાં સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તે ચકાસી શકાય.

ઉદાહરણ 19 : એક હોડી નદીના સામા પ્રવાહે 30 કિમી અને પ્રવાહની દિશામાં 44 કિમી અંતર 10 કલાકમાં કાપે છે. તે હોડીને તે જ નદીમાં 40 કિમી સામા પ્રવાહે અને 55 કિમી પ્રવાહની દિશામાં કાપતાં 13 કલાક જેટલો સમય લાગે છે. નદીના પ્રવાહની અને હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ x કિમી/કલાક છે અને પ્રવાહની ઝડપ y કિમી/કલાક છે. તેથી પ્રવાહની દિશામાં હોડીની ઝડપ $(x + y)$ કિમી/કલાક થાય અને સામા પ્રવાહે હોડીની ઝડપ $(x - y)$ કિમી/કલાક થશે.

ઉપરાંત સમય $= \frac{\text{અંતર}}{\text{ઝડપ}}$

તેથી હોડી 30 કિમી પ્રવાહની સામેની દિશામાં જાય ત્યારે લાગતો સમય t_1 કલાકમાં લઈએ તો

$$t_1 = \frac{30}{x-y}$$

જો હોડી 44 કિમી પ્રવાહની દિશામાં જાય ત્યારે લાગતો સમય t_2 કલાકમાં લઈએ તો

$$t_2 = \frac{44}{x+y}$$

વળી, $t_1 + t_2 = 10$ આપેલ છે.

$$\therefore \frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \qquad (1)$$

તે જ પ્રમાણે, 40 કિમી સામા પ્રવાહે અને 55 કિમી પ્રવાહની દિશામાં અંતર કાપતાં લાગતો સમય 13 કલાક છે.

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \qquad (2)$$

(1) અને (2) માં $\frac{1}{x-y} = u$ અને $\frac{1}{x+y} = v$ લઈએ, (3)

સમીકરણ (1) અને (2)માં આ કિંમતો મૂકતાં આપણને સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મળશે.

$30u + 44v = 10$ અથવા $30u + 44v - 10 = 0$ (4)

$40u + 55v = 13$ અથવા $40u + 55v - 13 = 0$ (5)

ચોકડી ગુણાકારની રીતનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{u}{44(-13)-55(-10)} = \frac{v}{40(-10)-30(-13)} = \frac{1}{30(55)-44(40)}$$

$$\therefore \frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

$$\therefore u = \frac{1}{5}, v = \frac{1}{11}$$

હવે, u અને v ની કિંમત સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5}$ અને $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$

$\therefore x - y = 5$ અને $x + y = 11$ (6)

આ સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં,

$$2x = 16$$

$$\therefore x = 8$$

(6) માં આપેલ સમીકરણોની બાદબાકી કરતાં,

$2y = 6$

$\therefore\ y = 3$

સ્થિર પાણીમાં હોડીની ઝડપ 8 કિમી/કલાક અને નદીના પ્રવાહની ઝડપ 3 કિમી/કલાક છે.

ચકાસણી : ઉકેલ પ્રશ્નની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 3.6

1. નીચેનાં સમીકરણયુગ્મને યોગ્ય આદેશ વડે સુરેખ સમીકરણયુગ્મમાં રૂપાંતરિત કરીને તેમનો ઉકેલ મેળવો :

(i) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} = 2$, $\quad \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} = \dfrac{13}{6}$

(ii) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = 2$, $\quad \dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iii) $\dfrac{4}{x} + 3y = 14$, $\quad \dfrac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{1}{y-2} = 2$, $\quad \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{3}{y-2} = 1$

(v) $\dfrac{7x-2y}{xy} = 5$, $\quad \dfrac{8x+7y}{xy} = 15$

(vi) $6x + 3y = 6xy$, $\quad 2x + 4y = 5xy$

(vii) $\dfrac{10}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 4$, $\quad \dfrac{15}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\dfrac{1}{3x+y} + \dfrac{1}{3x-y} = \dfrac{3}{4}$, $\quad \dfrac{1}{2(3x+y)} - \dfrac{1}{2(3x-y)} = -\dfrac{1}{8}$

2. નીચેની સમસ્યાઓમાંથી સમીકરણયુગ્મ રચો અને તેમનો ઉકેલ શોધો :

(i) રીતુ પ્રવાહની દિશામાં 20 કિમી અંતર 2 કલાકમાં અને પ્રવાહની સામેની દિશામાં 4 કિમી અંતર 2 કલાકમાં કાપે છે. તેની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ અને પ્રવાહની ઝડપ શોધો.

(ii) 2 સ્ત્રીઓ અને 5 પુરુષો સાથે મળીને એક ભરતકામ 4 દિવસમાં પૂરું કરી શકે છે. જો 3 સ્ત્રીઓ અને 6 પુરુષોને તે જ કામ સોંપવામાં આવે તો તે કામ 3 દિવસમાં પૂરું કરે છે. તો એક સ્ત્રીને સ્વતંત્ર રીતે કામ પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે ? એક પુરુષને સ્વતંત્ર રીતે કામ પૂરું કરતાં કેટલો સમય લાગે ?

(iii) રૂહી તેના વતન જવા માટે 300 કિમીની મુસાફરી અંશતઃ ટ્રેન દ્વારા અને અંશતઃ બસ દ્વારા કરે છે. જો તે 60 કિમી મુસાફરી ટ્રેન દ્વારા અને બાકીની મુસાફરી બસ દ્વારા કરે તો તેને વતન પહોંચતાં 4 કલાક લાગે છે. જો તે ટ્રેન દ્વારા 100 કિમી અને બાકીની મુસાફરી બસ દ્વારા કરે તો તેને વતન પહોંચતાં 10 મિનિટ વધારે લાગે છે, તો ટ્રેન અને બસની પ્રતિ કલાક સરેરાશ ઝડપ શોધો.

સ્વાધ્યાય 3.7 (વૈકલ્પિક)*

1. બે મિત્રો અની અને બીજુની ઉંમરનો તફાવત 3 વર્ષ છે. અનીના પિતા ધરમની ઉંમર (વર્ષમાં) અનીની ઉંમરથી બમણી અને બીજુની ઉંમર (વર્ષમાં) તેની બહેન કેથી કરતાં બે ગણી છે. જો કેથી અને ધરમની ઉંમરના વર્ષનો તફાવત 30 વર્ષ હોય, તો અની અને બીજુની ઉંમર શોધો.

2. એક વ્યક્તિ તેના મિત્રને કહે છે, 'જો તું મને સો રૂપિયા આપે તો મારી પાસે તારાથી બે ગણા રૂપિયા હશે.' બીજો વ્યક્તિ કહે છે ''જો તું મને દસ રૂપિયા આપે, તો મારી પાસે તારાથી છ ગણા રૂપિયા હશે.'' અનુક્રમે બંનેની મૂડી રકમ જણાવો.

[ભાસ્કર-II ના બીજગણિતમાંથી] [સૂચન : $x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$]

3. એક ટ્રેન અચળ ઝડપે ચોક્કસ અંતર કાપે છે. જો ટ્રેનની ઝડપમાં 10 કિમી/કલાક વધારો થાય તો, તે મુસાફરી માટે નક્કી સમય કરતાં 2 કલાક ઓછો સમય લે છે અને ટ્રેનની ઝડપમાં 10 કિમી/કલાકનો ઘટાડો કરતાં, તે મુસાફરી માટે નક્કી સમય કરતાં 3 કલાક વધારે સમય લે છે, તો ટ્રેન દ્વારા કપાયેલું કુલ અંતર શોધો.

4. એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને હારમાં ઊભા રાખવામાં આવ્યા છે. દરેક હારમાં 3 વિદ્યાર્થીઓ વધારે ઊભા રાખતાં 1 હાર ઓછી બને છે. 3 વિદ્યાર્થીઓ પ્રત્યેક હારમાં ઓછા ઊભા રાખતાં 2 હાર વધારે બને છે, તો વર્ગખંડમાં રહેલા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

5. જો ΔABCમાં $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ હોય, તો ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનાં માપ શોધો.

6. સમીકરણો $5x - y = 5$ અને $3x - y = 3$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાના આલેખ દોરો. y-અક્ષ અને બંને રેખાઓ દ્વારા બનતાં ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ જણાવો.

7. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ ઉકેલો :

(i) $px + qy = p - q$
$qx - py = p + q$

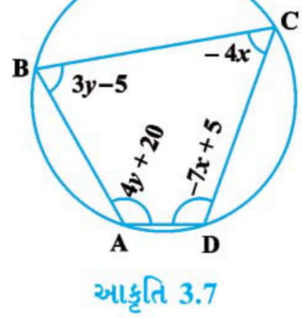
(ii) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
$ax + by = a^2 + b^2$

(iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$
$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$
$-378x + 152y = -604$

8. (આકૃતિ 3.7 જુઓ.) જો ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ હોય, તો તે ચક્રીય ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ શોધો.



આકૃતિ 3.7

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષા માટે ધ્યાનમાં લેવાનો નથી.

3.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. એકના એક જ બે ચલમાં બે સુરેખ સમીકરણોને આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહીશું.

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$, જ્યાં $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

તથા $a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

2. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની બે રીતો છે :

(i) આલેખની રીત (ii) બૈજિક રીત

3. આલેખની રીત :

સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો આલેખ એક જ આલેખપત્ર પર બે રેખાઓ દર્શાવે છે.

(i) જો ઉપર્યુક્ત બંને રેખાઓ પરસ્પર છેદે તો સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ હોય અને બે રેખાઓના અનન્ય છેદબિંદુના યામ એ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ દર્શાવે. આ પરિસ્થિતિમાં આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય.

(ii) જો બંને રેખાઓ સંપાતી હોય, તો રેખા પરનાં અનંત બિંદુઓના યામ સમીકરણનો ઉકેલ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો છે તેમ કહેવાય. આ પરિસ્થિતિમાં બંને સમીકરણો સુરેખ અવલંબી છે તેમ કહેવાય.

(iii) જો બંને રેખાઓ સમાંતર હોય, તો તેમનું સામાન્ય બિંદુ ન મળે. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણયુગ્મને કોઈ વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણો સુસંગત નથી તેમ કહેવાય.

4. સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે ત્રણ બૈજિક રીતો છે.

(i) આદેશની રીત (ii) લોપની રીત (iii) ચોકડી ગુણાકારની રીત

5. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પો ઉદ્ભવે છે.

(i) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

(ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2},\ \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ તથા $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

(iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે અને અવલંબી છે.

6. સુરેખ ન હોય તેવાં કેટલાંક સમીકરણોને યોગ્ય આદેશ પસંદ કરી સુરેખ સમીકરણમાં રૂપાંતર કરી શકાય છે.

D9D5J9