U9H3K5

સંભાવના 15

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

– R.S. Woodward

15.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ઘટનાઓની પ્રાયોગિક સંભાવનાઓનો અભ્યાસ ધોરણ IX માં કર્યો છે. તે પ્રયોગોનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત હતી.

આપણે એક પ્રયોગની ચર્ચા કરી હતી. તેમાં એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાથી મળતાં પરિણામોની આવૃત્તિ નીચે પ્રમાણે હતી :

છાપ (H) : 455 કાંટો (T) : 545

આ પ્રયોગના આધારે, છાપ મળવાની પ્રાયોગિક સંભાવના $\frac{455}{1000}$, એટલે કે 0.455 હતી અને કાંટો મળવાની સંભાવના 0.545 હતી. (આ સાથે જ ધોરણ IX ગણિતશાસ્ત્રના પાઠ્યપુસ્તકના પ્રકરણ 15 નું ઉદાહરણ 1 જુઓ.) નોંધ કરો કે, આ સંભાવનાઓ એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત છે. આ કારણે, તે પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ કહેવાય છે. વાસ્તવમાં, પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ, ઘટનાઓ ઉદ્ભવે તે માટેના પ્રત્યક્ષ પ્રયોગો અને જરૂર પૂરતા સાનુકૂળ સંજોગોનાં પરિણામો પર આધારિત છે. તદુપરાંત, આ સંભાવનાઓ કેવળ 'અંદાજિત' છે. જો આપણે આ જ પ્રયોગને અન્ય 1000 વખત કરીએ, તો આપણને જુદી માહિતી મળી શકે અને તે અન્ય અંદાજિત સંભાવના આપતી હોય.

તમે એક સિક્કાને અનેક વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ ધોરણ IX માં કર્યો છે અને નોંધ્યું છે કે, ઘણી વાર સિક્કા પર છાપ (અથવા કાંટો) મળ્યો છે. (પ્રકરણ 15 ની પ્રવૃત્તિઓ 1 અને 2 નો સંદર્ભ જુઓ.) તમે એ પણ નોંધ્યું હશે કે,

જેમ જેમ સિક્કાને ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના, સંખ્યા $\frac{1}{2}$ ની નજીક અને નજીક પહોંચે છે. કેવળ તમે જ નહિ, પરંતુ દુનિયાના જુદા-જુદા ભાગોમાંથી અન્ય ઘણી બધી વ્યક્તિઓએ આ પ્રકારના પ્રયોગ કર્યા છે અને સિક્કા પર મળતી છાપની સંખ્યા નોંધી છે.

ઉદાહરણ તરીકે, અઢારમી સદીના ફ્રેન્ચ પ્રકૃતિશાસ્ત્રજ્ઞ ***કોમ્ટ દ બફ્ફને (Comte de Buffon)*** એક સિક્કાને 4040 વખત ઉછાળ્યો અને 2048 વખત છાપ મેળવી. આ કિસ્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{2048}{4040}$ હતી, એટલે કે 0.507. બ્રિટનના ***જે. ઈ. કેરીચે (J. E. Kerrich)*** સિક્કાને 10000 વખત ઉછાળતાં 5067 વખત છાપ મેળવી. આ કિસ્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ હતી. આંકડાશાસ્ત્રી ***કાર્લ પીઅરસને (Karl Pearson)*** કેટલોક વધારે સમય ફાળવ્યો અને 24,000 વખત સિક્કાને ઉછાળ્યો. તેણે 12,012 વખત છાપ મેળવી અને આમ, તેણે છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના 0.5005 મેળવી હતી.

હવે, ધારો કે આપણે પૂછીએ, જો પ્રયોગને દસ લાખ વખત અથવા એક કરોડ વખત અને આમ વધુ ને વધુ વખત (પુનરાવર્તિત) કરવામાં આવે તો છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના શું થશે ? આપને સહજ જ્ઞાનથી અંતઃસ્ફુરણા થશે કે જેમ સિક્કાને ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના સંખ્યા 0.5 એટલે કે $\frac{1}{2}$ ની આસપાસ સ્થાયી થાય છે. તેને જ આપણે છાપ મેળવવાની (અથવા કાંટો મેળવવાની) ***સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (theoretical probability)*** કહીએ છીએ. તે તમે પછીના વિભાગમાં જોશો. આ પ્રકરણમાં, આપણે ઘટનાની **પ્રશિષ્ટ (સૈદ્ધાંતિક પણ કહેવાય છે)** સંભાવનાનો પરિચય અને આ ખ્યાલ પર આધારિત સરળ કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું.

15.2 સંભાવના – પ્રશિષ્ટ અભિગમ

R3P5I3

ચાલો, આપણે નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

ધારો કે, એક સિક્કાને યાદચ્છિક રીતે ઉછાળ્યો છે.

> જ્યારે આપણે એક સિક્કો બોલીએ છીએ, ત્યારે આપણે માની લઈએ છીએ કે, તે 'સમતોલ' છે, એટલે કે, તેના માટે એવું કોઈ જ કારણ નથી કે તે બીજી બાજુ કરતાં એક બાજુ પર વધુ વખત નીચે પડે છે. એવા સિક્કાના આ સમપ્રમાણતાના ગુણધર્મને આપણે સમતોલ હોવાનો ગુણધર્મ કહીશું. શબ્દપ્રયોગ 'યાદચ્છિક ઉછાળ'નો આપણે એ અર્થ કરીશું કે, સિક્કો મુક્તપણે, કોઈપણ પ્રકારના પૂર્વગ્રહ કે વિઘ્ન વિના નીચે પડવા માટે મુક્ત છે.

આપણે અગાઉથી જ જાણીએ છીએ કે બે શક્ય રીતો પૈકી કોઈ એક રીતે જ સિક્કો નીચે પડશે - સિક્કા ઉપર છાપ (H) આવશે અથવા કાંટો (T) આવશે (સિક્કો તેની ધાર પર નીચે પડશે, તે શક્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, સિક્કો રેતીમાં પડે છે. આપણે આ શક્યતાને નકારી કાઢીએ છીએ.). આપણે વ્યાજબીપણે ધારી શકીએ છીએ કે, પ્રત્યેક પરિણામ, છાપ અથવા કાંટો, ઉદ્ભવવાની એટલી જ શક્યતા છે, જેટલી બીજાની. પરિણામો છાપ અથવા કાંટો, સમસંભાવી છે, એમ કહીને આપણે તેનો ઉલ્લેખ કરીશું.

સમસંભાવી પરિણામોના અન્ય ઉદાહરણ માટે, ધારો કે, આપણે એક પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. આપણા માટે, પાસાનો અર્થ હંમેશાં સમતોલ પાસો એવો કરીશું. શક્ય પરિણામો શું છે ? તે પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે.

પ્રત્યેક સંખ્યા પાસા ઉપર તે દેખાય તેની શક્યતા સમાન છે. તેથી પાસાને ફેંકવાનાં સમસંભાવી પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે.

શું પ્રત્યેક પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી હોય છે ? ચાલો આપણે જોઈએ.

ધારો કે, એક થેલામાં 4 લાલ દડા અને 1 ભૂરો દડો છે અને તમે થેલામાં જોયા વગર એક દડો યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરો છો. કયાં પરિણામો મળશે ? શું પરિણામો - 'એક લાલ દડો' અને 'એક ભૂરો દડો' સમસંભાવી છે ? 4 લાલ દડા અને માત્ર એક ભૂરો દડો હોવાથી, તમે સંમત થશો કે, તમને ભૂરો દડો મળે તે કરતાં લાલ દડો મળવાની શક્યતા વધુ છે. તેથી, પરિણામ (લાલ દડો અથવા ભૂરો દડો) સમસંભાવી નથી. આમ છતાં, થેલામાંથી કોઈ પણ રંગનો એક દડો યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવાના પ્રયોગનાં પરિણામ સમસંભાવી છે. તેથી, બધા જ પ્રયોગો માટે જરૂરી નથી કે, પરિણામો સમસંભાવી હોય.

પરંતુ, આ પ્રકરણમાં, હવે પછીથી, ***આપણે ધારી લઈશું કે, બધા જ પ્રયોગોનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.***

ધોરણ IX માં ઘટના E ની પ્રયોગાત્મક સંભાવના P(E) આપણે નીચે આપેલ સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરી છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના E ઉદ્ભવે તેવા પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

સંભાવનાનું પ્રયોગમૂલક અર્થઘટન પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ઘણી વખત મોટી સંખ્યાના પ્રયત્નો પુનરાવર્તિત કરી શકાય એવી પ્રત્યેક ઘટના પર લાગુ પાડી શકાય. પ્રયોગને પુનરાવર્તિત કરવાની ક્રિયાને કેટલીક મર્યાદાઓ છે, જેમ કે, તે ખૂબ જ ખર્ચાળ હોઈ શકે અથવા ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં અવ્યવહારુ પણ હોય. અલબત્ત, સિક્કાને ઉછાળવાના અથવા પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગોમાં તે સારી રીતે કાર્ય કરે છે. પરંતુ, ઉપગ્રહનું પ્રક્ષેપણ કરવાના પ્રયોગના પુનરાવર્તન વિશે શું કહેવાય ? ખાસ કરીને પ્રક્ષેપણ દરમિયાન ઉપગ્રહના નિષ્ફળ જવાની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે અથવા બહુમાળી ઇમારત ભૂકંપમાં નાશ પામે તેની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે ઘટનાનું પુનરાવર્તન કરાય ?

જે પ્રયોગોમાં આપણે ચોક્કસ પ્રકારની ધારણાઓ કરવા માટે તૈયાર હોઈએ છીએ, તે પ્રયોગના પુનરાવર્તનને ટાળી શકાય, કારણ કે ધારણાઓ સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની ગણતરીમાં પ્રત્યક્ષ રીતે મદદ કરે છે. સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા આપણને સંભાવનાની નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે. (આ ધારણા ઉપરનાં બે ઉદાહરણો સિક્કા તથા પાસા ઉછાળવા જેવા ઘણા પ્રયોગોમાં સત્ય છે.)

ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (પ્રશિષ્ટ સંભાવના પણ કહેવાય છે), P(E) તરીકે દર્શાવાય છે અને તેને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા}}$$

અત્રે આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાને આપણે ટૂંકમાં સંભાવના તરીકે લઈશું.

સંભાવનાની આ વ્યાખ્યા ***પિઅર સિમોન લાપ્લાસે (Pierre Simon Laplace)*** C.E. 1795 માં આપી હતી.

Probability theory had its origin in the 16th century when an Italian physicist and mathematician ***J.Cardan*** wrote the first book on the subject, ***The Book on Games of Chance.*** Since its inception, the study of probability has attracted the attention of great mathematicians. ***James Bernoulli*** (C.E.1654 – C.E.1705), ***A. de Moivre*** (C.E.1667 – C.E.1754), and ***Pierre Simon Laplace*** are among those who made significant contributions to this field. Laplace's ***Theorie Analytique des Probabilités,*** C.E. 1812, is considered to be the greatest contribution by a single person to the theory of probability. In recent years, probability has been used extensively in many areas such as biology, economics, genetics, physics, sociology etc.

Pierre Simon Laplace
(C.E.1749-C.E.1827)

ચાલો, આપણે જેમના માટે કેટલીક સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા સત્ય છે તેવી ઘટનાઓની સંભાવના શોધીએ.

ઉદાહરણ 1 : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે ત્યારે છાપ (H) મળવાની સંભાવના શોધો તથા કાંટો (T) મળવાની સંભાવના પણ શોધો.

ઉકેલ : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા બે છે - છાપ (H) અને કાંટો (T). છાપ મળે તેને ઘટના E લો. ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા (એટલે કે છાપ મળવાની) 1 છે. તેથી

$$P(E) = P(\text{છાપ}) = \frac{\text{E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}} = \frac{1}{2}$$

આ જ પ્રમાણે, જો 'કાંટો મળે' તે ઘટના F હોય તો

$$P(F) = P(\text{કાંટો}) = \frac{1}{2}$$ (શા માટે ?)

ઉદાહરણ 2 : એક થેલામાં લાલ, ભૂરો અને પીળો એમ ત્રણ સમાન કદના દડા છે. ક્રિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે. તેણે પસંદ કરેલ દડો (i) પીળો હોય (ii) લાલ હોય (iii) ભૂરો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ક્રિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે. તેથી, તે આપેલ દડામાંથી ગમે તે એક દડો પસંદ કરે એ સમસંભાવી છે.

'પસંદ કરેલ દડો પીળો હોય' તેને ઘટના Y લો,

'પસંદ કરેલ દડો ભૂરો હોય' તેને ઘટના B લો, અને 'પસંદ કરેલ દડો લાલ હોય' તેને ઘટના R લો.

હવે, શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા = 3 છે.

(i) ઘટના Y માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 1. તેથી, $P(Y) = \frac{1}{3}$

આ જ પ્રમાણે (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ અને (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$

નોંધ :

1. જે ઘટના પ્રયોગનું માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી હોય તેને ***પ્રાથમિક ઘટના*** કહે છે. ઉદાહરણ 1 માં બંને ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે. આ જ પ્રમાણે ઉદાહરણ 2 માં ત્રણેય ઘટનાઓ Y, B અને R પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે.

2. ઉદાહરણ 1માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(E) + P(F) = 1$

ઉદાહરણ 2 માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

અવલોકન કરો કે, ***પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 છે.*** વ્યાપક રીતે પણ આ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : ધારો કે, આપણે પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. (i) પાસાના ઉપરના પૃષ્ઠ ઉપર 4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ? (ii) 4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ?

ઉકેલ : (i) અહીં, ધારો કે, '4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવી' તે ઘટના E છે. પાસો ફેંકવાના કુલ શક્ય પરિણામો છ છે : 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 અને E માટે સાનુકૂળ પરિણામો 5 અને 6 છે. માટે E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 2 છે. તેથી,

$$P(E) = P\ (4 \text{ કરતાં મોટી સંખ્યા}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) ધારો કે '4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવવી' તે ઘટના F છે. શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 6

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામો 1, 2, 3, 4 છે.

તેથી, F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે.

માટે, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ઉપરના ઉદાહરણમાં ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે ? ના, તેઓ પ્રાથમિક ઘટનાઓ નથી કારણ કે, ઘટના E માં 2 પરિણામો અને ઘટના F માં 4 પરિણામો છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 1 પરથી, આપણે નોંધ કરીએ,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

જ્યાં, E એ 'છાપ મેળવવાની' ઘટના છે અને F એ 'કાંટો મેળવવાની' ઘટના છે. ઉદાહરણ 3 નાં (i) અને (ii) પરથી, આપણને મળે છે ;

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

જ્યાં, E એ ઘટના '4 કરતાં મોટી સંખ્યા' અને F એ ઘટના 4 કરતાં નાની અથવા તેને સમાન સંખ્યા છે.

આપણે નોંધીએ કે, 4 કરતાં મોટી નહી તેવી સંખ્યા મેળવવી એ 4 કે 4 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવા બરાબર જ છે અને એથી ઉલટું પણ.

ઉપર દર્શાવેલ (1) અને (2) માં, શું F એ 'not E' (એટલે કે, 'E નહિ') ને સમાન નથી ? હા, તે છે. આપણે ઘટના 'E નહી' ને $\overline{E}$ દ્વારા દર્શાવીશું.

તેથી $P(E) + P(E \text{ નહિ}) = 1$

એટલે કે $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

આ પરિણામ આપણને આપે છે, $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ***ઘટના* E *માટે સત્ય છે કે* $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$**

ઘટના $\overline{E}$, ઘટના 'E નહિ' રજૂ કરે છે. તેને ઘટના E ની પૂરક ઘટના કહે છે. આપણે E અને $\overline{E}$ એકબીજાની પૂરક ઘટનાઓ છે તેમ પણ કહીએ છીએ.

આગળનો અભ્યાસ કરતાં પહેલાં, ચાલો આપણે નીચે આપેલા પ્રશ્નોના ઉત્તર શોધવાના પ્રયત્ન કરીએ.

(i) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં સંખ્યા 8 મળે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં 7 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના શું છે ?

ચાલો આપણે (i) નો ઉત્તર જોઈએ :

આપણે જાણીએ છીએ કે પાસાને એકવાર ઉછાળતાં માત્ર છ શક્ય પરિણામો મળે છે. આ પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે. પાસાના કોઈ પણ પૃષ્ઠ પર 8 અંકિત નથી, તેથી 8 માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી. એટલે કે, આવાં પરિણામોની સંખ્યા શૂન્ય છે. બીજા શબ્દોમાં, પાસાને એક વાર ઉછાળતાં 8 મેળવવો, અશક્ય છે.

તેથી, $P(8 \text{ મેળવવું}) = \frac{0}{6} = 0$

એટલે કે, **જે ઘટના ઉદ્ભવવી અશક્ય છે તેની સંભાવના 0 છે. આવી ઘટનાને *અશક્ય ઘટના* કહે છે.**

ચાલો આપણે (ii) નો ઉત્તર જોઈએ :

પાસાની દરેક સપાટી પર 7 કરતાં નાની સંખ્યા અંકિત કરેલ હોવાથી, એ વાત ચોક્કસ છે કે, પાસાને એકવાર ઉછાળવાથી હંમેશા 7 કરતાં નાની સંખ્યા જ મળશે. તેથી, સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા પણ બધા જ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા જેટલી જ એટલે કે 6 છે.

એના પરિણામ સ્વરૂપે $P(E) = P(7 \text{ કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવી}) = \frac{6}{6} = 1$

તેથી, જે ઘટના ચોક્કસપણે અથવા નિશ્ચિતપણે ઉદ્ભવે તેમ હોય તેની સંભાવના 1 છે. આવી ઘટનાને ચોક્કસ ઘટના અથવા નિશ્ચિત ઘટના કહે છે.

નોંધ : સંભાવના P(E) ની વ્યાખ્યા પરથી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, અંશ (ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા) એ હંમેશાં છેદ જેટલી અથવા તેનાં કરતા નાની (શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા) સંખ્યા છે. તેથી,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

હવે, ચાલો આપણે પત્તાંની રમત સાથે સંકળાયેલ ઉદાહરણ લઈએ. તમે પત્તાં રમવાની થોકડી જોઈ છે ? તે 52 પત્તાં ધરાવે છે તેમને એક ભાતનાં 13 પત્તાં હોય તેવા 4 સમૂહમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. પ્રત્યેક પત્તું કાળી (♠), લાલ (♥), ચોકટ (♦) અથવા ફુલ્લી ♣) નું હોય છે. કાળી અને ફુલ્લીનાં પત્તાં કાળા રંગના, જ્યારે લાલ અને ચોકટનાં પત્તાં લાલ રંગના હોય છે. પ્રત્યેક સમૂહમાં એક્કો, રાજા, રાણી, ગુલામ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 નાં પત્તાં હોય છે. રાજા, રાણી અને ગુલામના પત્તાંઓને ***મુખમુદ્રા પત્તાં (face cards)*** કહે છે.

ઉદાહરણ 4 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલું પત્તું (i) એક્કો હોય (ii) એક્કો ન હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : સરખી રીતે ચીપેલાં પત્તાં સમસંભાવી પરિણામોની ખાતરી આપે છે.

(i) થોકડીમાં 4 એક્કા હોય છે. 'પત્તું એક્કો છે' તેને ઘટના E લો.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે અને શક્ય પરિણામોની સંખ્યા 52 છે. (શા માટે ?)

તેથી, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) 'ખેંચેલું પત્તું એક્કો નથી' તે ઘટનાને F લો.

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $= 52 - 4 = 48$ છે. (શા માટે ?)

શક્ય પરિણામોની સંખ્યા $= 52$

તેથી, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

નોંધ : નોંધ કરો કે, F બીજું કશું નહીં પરંતુ $\overline{E}$ છે. તેથી, આપણે P(F) ની ગણતરી નીચે પ્રમાણે પણ કરી શકીએ : $P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

ઉદાહરણ 5 : બે ખેલાડીઓ, સંગીતા અને રેશ્મા ટેનિસ મૅચ રમે છે. સંગીતા મૅચ જીતે તેની સંભાવના 0.62 આપેલ છે. રેશ્મા મૅચ જીતે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, S અને R અનુક્રમે સંગીતા મૅચ જીતે અને રેશ્મા મૅચ જીતે તે ઘટનાઓ દર્શાવે છે.

સંગીતાની મૅચ જીતવાની સંભાવના $= P(S) = 0.62$ (આપેલ છે.)

રેશ્માની મૅચ જીતવાની સંભાવના $= P(R) = 1 - P(S)$ [કારણ કે, R અને S પૂરક ઘટનાઓ છે.]

$= 1 - 0.62 = 0.38$

ઉદાહરણ 6 : સવિતા અને હમિદા મિત્રો છે. બંનેના (i) જન્મદિવસ જુદા-જુદા હોય (ii) જન્મદિવસ એક જ હોય તેની સંભાવના કેટલી થશે ? (લીપ વર્ષને અવગણવું.)

ઉકેલ : બે મિત્રોમાંથી, એક છોકરી, કહો સવિતાનો જન્મદિવસ વર્ષનો કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે છે. હવે, હમિદાનો જન્મદિવસ પણ વર્ષનાં 365 દિવસ પૈકી કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે.

આપણે માની લઈશું કે, આ 365 પરિણામો સમસંભાવી છે.

(i) જો હમિદાનો જન્મદિવસ, સવિતાના જન્મદિવસ કરતાં જુદો હોય, તો તેના જન્મદિવસ માટે સાનુકૂળ પરિણામો $365 - 1 = 364$ છે.

તેથી, P (હમિદાનો જન્મદિવસ એ સવિતાના જન્મદિવસથી જુદો છે.) $= \frac{364}{365}$

(ii) P (સવિતા અને હમિદાનો જન્મદિવસ એક જ છે.)

$= 1 - P$ (બંનેના જન્મદિવસ જુદા છે.)

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [P(\overline{E}) = 1 - P(E) \text{ નો ઉપયોગ કરતાં}]$$

$$= \frac{1}{365}$$

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X માં 40 વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમાંથી 25 છોકરીઓ અને 15 છોકરાઓ છે. વર્ગ શિક્ષકે એક વિદ્યાર્થીને વર્ગ પ્રતિનિધિ તરીકે પસંદ કરવાનો છે. તે દરેક વિદ્યાર્થીના નામ ભિન્ન ભિન્ન ચિઠ્ઠી પર લખે છે, ચિઠ્ઠી એકસમાન છે. પછી તે ચિઠ્ઠીઓને થેલામાં મૂકે છે અને તેમને સંપૂર્ણરીતે મિશ્ર કરે છે. પછી તે થેલામાંથી એક ચિઠ્ઠી કાઢે છે. ચિઠ્ઠી પર લખેલ નામ (i) છોકરીનું હોય (ii) છોકરાનું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : કુલ 40 વિદ્યાર્થીઓ છે અને એક નામની ચિઠ્ઠી પસંદ કરવાની છે.

(i) શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા 40 છે.
છોકરીનું નામ લખેલ ચિઠ્ઠી પસંદ કરી હોય તેના માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 25 છે. (શા માટે ?)

તેથી, P (છોકરીના નામવાળી ચિઠ્ઠી) = P (છોકરી) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) છોકરાનું નામ લખેલ ચિઠ્ઠી પસંદ કરી હોય તેના માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 15 છે. (શા માટે ?)

તેથી, P (છોકરાના નામવાળી ચિઠ્ઠી) = P (છોકરો) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

નોંધ : P (છોકરો) આપણે અન્ય રીતે પણ શોધી શકીએ.

P (છોકરો) = 1 – P (છોકરો નથી) = 1 – P (છોકરી) $= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

ઉદાહરણ 8 : એક ડબામાં 3 ભૂરી, 2 સફેદ અને 4 લાલ લખોટીઓ છે. જો ડબ્બામાંથી યાદચ્છિક રીતે એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો તે (i) સફેદ (ii) ભૂરી (iii) લાલ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : એમ કહેવું કે, યાદચ્છિક રીતે એક લખોટી પસંદ કરવી, એ એવું કહેવાનો ટૂંકો રસ્તો છે કે, બધી જ લખોટીઓ સમસંભાવીપણે પસંદ થઈ શકે છે. તેથી, શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 3 + 2 + 4 = 9 (શા માટે ?)

ધારો કે, W એ પસંદ થયેલ 'લખોટી સફેદ છે' તે ઘટના, B એ 'લખોટી ભૂરી છે' તે ઘટના અને R એ 'લખોટી લાલ છે' તે ઘટના દર્શાવે છે.

(i) ઘટના W માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 2 છે.

તેથી, $P(W) = \frac{2}{9}$

આ જ પ્રમાણે, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ અને (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

નોંધ કરો કે, P(W) + P(B) + P(R) = 1

ઉદાહરણ 9 : હરપ્રીત બે જુદા-જુદા સિક્કાઓને એક સાથે ઉછાળે છે (કહો, 1 ₹ નો એક અને 2 ₹ નો બીજો) તે ઓછામાં ઓછી એક છાપ (H) મેળવે તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : આપણે 'છાપ' માટે H અને 'કાંટો' માટે T લખીશું. જ્યારે બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, ત્યારે શક્ય પરિણામો (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) મળે છે, તે તમામ સમસંભાવી છે. અહીં, (H, H) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા (કહો, ₹ 1) પર છાપ અને બીજા સિક્કા (₹ 2) પર પણ છાપ મળે છે. આ જ પ્રમાણે (H, T) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા પર છાપ અને બીજા સિક્કા પર કાંટો છે અને આમ આગળ.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામો, 'ઓછામાં ઓછી એક છાપ'; (H, H), (H, T) અને (T, H) છે. (શા માટે ?)

તેથી, E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 3 છે.

માટે, $P(E) = \frac{3}{4}$

એટલે કે, હરપ્રીત ઓછામાં ઓછી એક છાપ મેળવે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે.

નોંધ : તમે P(E) નીચે પ્રમાણે પણ શોધી શકો છો :

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad (\text{કારણ કે, } P(\overline{E}) = P\ (\text{છાપ નહિ}) = \frac{1}{4})$$

અત્યાર સુધી જેમની ચર્ચા કરી તે બધાં જ ઉદાહરણોમાં તમે એ નિરીક્ષણ કર્યું કે પ્રત્યેક પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા સાન્ત (finite) હતી ? જો ના હોય, તો શું થાય તે ચકાસીએ.

એવા ઘણા પ્રયોગો છે કે જેનાં પરિણામો આપેલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની ગમે તે સંખ્યા હોય, અથવા જેનાં પરિણામો વર્તુળ અથવા લંબચોરસની અંદરનું પ્રત્યેક બિંદુ હોય, વગેરે. શું હવે તમે તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા ગણી શકો છો ? તમે જાણો છો કે, આ શક્ય નથી ‘કારણ કે બે સંખ્યાઓ વચ્ચે અસંખ્ય (અનંત) સંખ્યાઓ હોય છે, અથવા વર્તુળની અંદર અનંત બિંદુઓ હોય છે. તેથી, સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની જે વ્યાખ્યા તમે શીખ્યાં તે વર્તમાન સ્વરૂપમાં લાગુ કરી શકાશે નહિ. આમાંથી બહાર નીકળવાનો શું માર્ગ છે ? આના ઉત્તર માટે, ચાલો આપણે નીચે આપેલ ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 10* : સંગીત ખુરશીની રમતમાં, સંગીત પૂરું પાડતી વ્યક્તિને સૂચના આપવામાં આવી છે કે, તે વગાડવાનું શરૂ કરે તેની 2 મિનિટમાં ગમે તે સમયે સંગીત વગાડવાનું રોકી દે. સંગીત શરૂ થયા પછીની પહેલી અડધી મિનિટમાં સંગીત બંધ થઈ જશે તેની સંભાવના શું છે ?

ઉકેલ : અહીં શક્ય પરિણામો 0 અને 2 વચ્ચેની તમામ સંખ્યાઓ છે. આ 0 થી 2 વચ્ચેનો સંખ્યા રેખા પરનો ભાગ છે. (આકૃતિ 15.1 જુઓ.)

આકૃતિ 15.1

ધારો કે, E એ ઘટના છે કે ‘પ્રથમ અડધી મિનિટ દરમિયાન સંગીત રોકાયું છે.’ ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામો સંખ્યા રેખા પર 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનાં બિંદુઓ છે.

0 થી 2 સુધીનું અંતર 2 છે અને 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનું અંતર $\frac{1}{2}$ છે. બધાં પરિણામો સમસંભાવી હોવાથી આપણે કહી શકીએ કે, કુલ અંતર 2 માંથી, ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર $\frac{1}{2}$ છે.

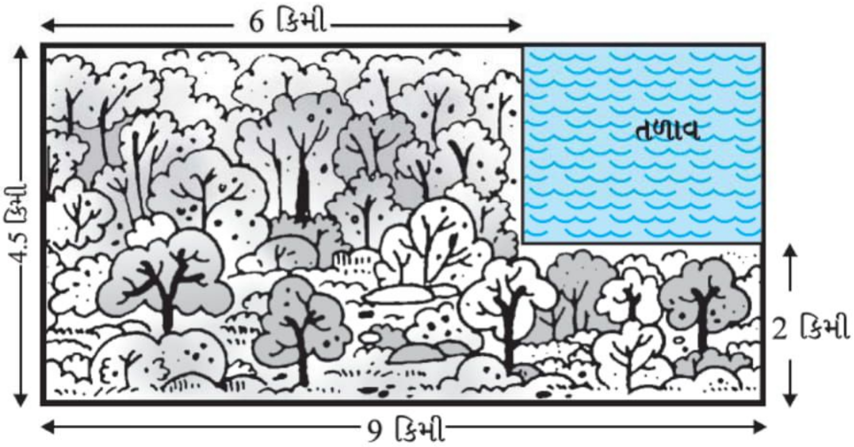
તેથી, $P(E) = \frac{\text{ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર}}{\text{કુલ અંતર કે, જેમાં પરિણામો સમાઈ શકે છે}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

શું આપણે ઉદાહરણ 10 નો ખ્યાલ, સાનુકૂળ ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તરની સંભાવના શોધવા માટે વિસ્તૃત કરી શકીએ ?

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

ઉદાહરણ 11* : ખોવાઈ ગયેલ હેલિકૉપ્ટર વિશે ખબર મળી છે કે તે આકૃતિ 15.2 માં દર્શાવેલ લંબચોરસ વિસ્તારમાં ક્યાંક તૂટી પડ્યું છે. શું સંભાવના છે કે, તે આકૃતિમાં બતાવેલ તળાવમાં તૂટી પડ્યું છે ?



આકૃતિ 15.2

ઉકેલ : હેલિકૉપ્ટર આપેલ વિસ્તારમાં ગમે ત્યાં તૂટી પડે તે સમસંભાવી છે.

હેલિકૉપ્ટર જ્યાં તૂટીને પડી શકે છે તે વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ = (4.5×9) કિમી^{2} = 40.5 કિમી^{2}

તળાવનું ક્ષેત્રફળ = (2.5×3) કિમી^{2} = 7.5 કિમી^{2}

તેથી, P (હેલિકૉપ્ટર તળાવમાં તૂટી પડે) = $\frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

ઉદાહરણ 12 : પૂંઠાની પેટીમાં રાખેલાં 100 ખમીસ પૈકી 88 ક્ષતિરહિત છે. તે પૈકી 8 માં નાની ખામીઓ છે અને 4 માં મોટી ખામીઓ છે. વેપારી જિમી ક્ષતિરહિત ખમીસ જ સ્વીકારશે, પરંતુ અન્ય વેપારી સુજાતા માત્ર મોટી ખામીવાળા ખમીસ જ નકારશે. પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે.

(i) તે જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : 100 ખમીસ ધરાવતી પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. માટે, 100 સમસંભાવી પરિણામો છે.

(i) જિમીને સાનુકૂળ (એટલે કે, સ્વીકાર્ય) પરિણામોની સંખ્યા = 88 (શા માટે ?)

આથી, જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ પસંદ થયું હોય તેની સંભાવના = $\frac{88}{100} = 0.88$

(ii) સુજાતાને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 88 + 8 = 96 (શા માટે ?)

તેથી, P (સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ) = $\frac{96}{100} = 0.96$

ઉદાહરણ 13 : એક ભૂરો અને એક રાખોડી એમ બે પાસાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. તમામ શક્ય પરિણામો લખો. પાસાની ઉપરની સપાટી પર દેખાતી સંખ્યાઓનો સરવાળો (i) 8 હોય (ii) 13 હોય (iii) 12 કે, તેનાથી નાનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : જ્યારે ભૂરો પાસો '1' બતાવે, ત્યારે રાખોડી પાસો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી કોઈ પણ એક સંખ્યા બતાવે. આ

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

જ રીતે જ્યારે ભૂરો પાસો '2', '3', '4', '5' અથવા '6' બતાવે ત્યારે શક્ય પરિણામોની સૂચિ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે ; પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડનો પ્રથમ ઘટક એ ભૂરા પાસા પર દેખાતી સંખ્યા અને દ્વિતીય ઘટક એ રાખોડી પાસા પર દેખાતી સંખ્યા છે.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

આકૃતિ 15.3

આપણે નોંધીએ કે, (1, 4) એ (4, 1) કરતાં જુદી છે. (શા માટે ?)

તેથી શક્ય પરિણામોની સંખ્યા $= 6 \times 6 = 36$

(i) ઘટના 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 8 છે' ને E વડે દર્શાવો તેનાં સાનુકૂળ પરિણામો (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) અને (6, 2) છે. (જુઓ આકૃતિ 15.3.)

એટલે કે, ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 5 છે.

તેથી, $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના F, 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 13' માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી.

તેથી, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના G, 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો હોય તે માટે તમામ પરિણામો સાનુકૂળ છે. તેથી, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$.

સ્વાધ્યાય 15.1

1. નીચેનાં વિધાનો પૂર્ણ કરો :

(i) ઘટના E ની સંભાવના + ઘટના 'E નહિ' ની સંભાવના = ...

(ii) ઉદ્‌ભવી ન શકે તેવી ઘટનાની સંભાવના .... છે. આવી ઘટનાને .... કહે છે.

(iii) ચોક્કસપણે ઉદ્‌ભવતી ઘટનાની સંભાવના .... છે. આવી ઘટનાને .... કહે છે.

(iv) પ્રયોગની તમામ મૂળભૂત (પ્રાથમિક) ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો .... છે.

(v) ઘટનાની સંભાવના .... થી મોટી અથવા તેના જેટલી અને .... થી નાની અથવા તેના જેટલી હોય છે.

2. નીચે આપેલ પૈકી કયા પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે ? સમજાવો.

(i) **પ્રયોગ :** ડ્રાઈવર કાર ચાલુ કરવાનો પ્રયત્ન કરે છે. **પરિણામ :** કાર ચાલુ થાય છે અથવા ચાલુ નથી થતી.

(ii) **પ્રયોગ :** ખેલાડી બાસ્કેટબૉલને તાકીને બાસ્કેટમાં નાખવાનો પ્રયત્ન કરે છે. **પરિણામ :** તે તાકીને બાસ્કેટમાં નાખે છે અથવા ચૂકી જાય છે.

(iii) **પ્રયોગ :** ખરા-ખોટા પ્રશ્નનો જવાબ આપવાની કસોટી આપવામાં આવી છે. **પરિણામ :** જવાબ સત્ય છે કે અસત્ય.

(iv) **પ્રયોગ :** બાળક જન્મ્યું છે. **પરિણામ :** તે બાબો છે કે બેબી.

3. શા માટે ફુટબૉલની રમતની શરૂઆતમાં કઈ ટુકડીને બૉલ મળવો જોઈએ તે નક્કી કરવા, સિક્કાને ઉછાળવો નિષ્પક્ષ ક્રિયા છે એવું વિચારાય છે ?

4. નીચેનામાંથી કયા વિકલ્પ ઘટનાની સંભાવના ન હોઈ શકે.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) – 1.5 (C) 15 % (D) 0.7

5. જો P(E) = 0.05 હોય તો 'E-નહિ' ની સંભાવના શું છે ?

6. એક થેલામાં લીંબુના સ્વાદની જ ગુલ્ફીઓ છે. માલિની થેલામાં જોયા વગર એક ગુલ્ફી બહાર કાઢે છે. તે (i) નારંગીના સ્વાદની ગુલ્ફી હોય (ii) લીંબુના સ્વાદની ગુલ્ફી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

7. આપેલ છે કે 3 વિદ્યાર્થીઓના સમૂહમાં બે વિદ્યાર્થીઓનો જન્મદિવસ સમાન ન હોય તેની સંભાવના 0.992 છે. બે વિદ્યાર્થીઓનો જન્મદિવસ સમાન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

8. એક થેલામાં 3 લાલ અને 5 કાળા દડા છે. થેલામાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. બહાર કાઢેલ દડો (i) લાલ હોય (ii) લાલ ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

9. એક પેટીમાં 5 લાલ લખોટીઓ, 8 સફેદ લખોટીઓ અને 4 લીલી લખોટીઓ છે. પેટીમાંથી એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે બહાર કાઢવામાં આવે છે. બહાર કાઢેલ લખોટી (i) લાલ હોય (ii) સફેદ હોય (iii) લીલી ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

10. એક ગલ્લામાં 50 p ના સો સિક્કા, ₹ 1ના પચાસ સિક્કા, ₹ 2 ના વીસ સિક્કા અને ₹ 5 ના દસ સિક્કા છે. જ્યારે આ ગલ્લાને ઊંધો કરવામાં આવે ત્યારે પાત્રમાંથી કોઈ એક સિક્કો બહાર પડે તે સમસંભાવી હોય, તો સિક્કો (i) 50 p નો સિક્કો હશે (ii) ₹ 5 નો સિક્કો નહિ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

11. ગોપી પોતાના માછલીઘર માટે દુકાનમાંથી માછલી ખરીદે છે. દુકાનદાર મોટી ટાંકીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક માછલી બહાર કાઢે છે. આ ટાંકીમાં 5 નર માછલી અને 8 માદા માછલી (જુઓ આકૃતિ 15.4.) છે. બહાર કાઢેલ નર માછલી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

આકૃતિ 15.4

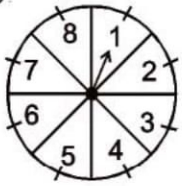
12. તકની એક રમતમાં ગોળ ફરતું એક તીર (arrow) હોય છે. તે 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 માંથી કોઈ એક સંખ્યા પાસે નિર્દેશ કરતું અટકે છે (આકૃતિ 15.5 જુઓ.) અને આ સમસંભાવી પરિણામો છે.

(i) તે 8 તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) અયુગ્મ સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(iii) 2 કરતાં મોટી સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(iv) 9 કરતાં નાની સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?



આકૃતિ 15.5

13. પાસાને એકવાર ફેંકવામાં આવે છે તો (i) અવિભાજ્ય સંખ્યા (ii) 2 અને 6 વચ્ચેની સંખ્યા (iii) અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના શોધો.

14. સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું કાઢવામાં આવે, તો

(i) લાલ રંગનો રાજા (ii) મુખમુદ્રાવાળું પત્તું (iii) લાલ રંગનું મુખમુદ્રાવાળું પત્તું

(iv) લાલનો ગુલામ (v) કાળીનું પત્તું (vi) ચોકટની રાણી

મળવાની સંભાવના શોધો.

15. પાંચ ચોકટનાં પત્તાં – દસ્સો, ગુલામ, રાણી, રાજા અને એક્કો એ તમામના મુખ નીચે તરફ રાખીને સરખી રીતે ચીપેલાં છે પછી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે.

(i) પત્તું રાણીનું હશે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) જો રાણીને કાઢીને એક બાજુએ મૂકવામાં આવે અને બીજું પત્તું ખેંચવામાં આવે તે (a) એક્કો હોય (b) રાણી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

16. ખામીવાળી 12 પેન આકસ્મિક રીતે 132 સારી પેનની સાથે ભળી ગઈ છે. એવું શક્ય નથી કે, કેવળ પેનને જોઈને જ કહી શકાય કે, પેન ખામીયુક્ત છે કે નહિ. આ જથ્થામાંથી એક પેન યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. કાઢવામાં આવેલી પેન ખામીરહિત છે તેની સંભાવના શોધો.

17. (i) 20 વીજળીના ગોળાઓનો જથ્થો 4 ખામીયુક્ત ગોળા ધરાવે છે. આ જથ્થામાંથી એક ગોળો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ ગોળો ખામીયુક્ત હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) ધારો કે, (i) માં કાઢવામાં આવેલ ગોળો ખામીયુક્ત નથી અને તેને પાછો મૂકવામાં પણ નથી આવ્યો. હવે, બાકીનાં ગોળામાંથી એક ગોળો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ ગોળો ખામીયુક્ત ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

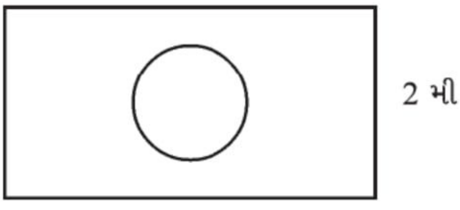
18. એક ખોખામાં 1 થી 90 સુધીના અંક લખેલી 90 ગોળ તકતીઓ છે. જો ખોખામાંથી એક ગોળ તકતી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તેના પર (i) બે અંકની સંખ્યા (ii) પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા (iii) 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

19. એક બાળક પાસે એક એવો પાસો છે જેની છ સપાટીઓ નીચે આપેલા અક્ષરો બતાવે છે :

A	B	C	D	E	A

આ પાસાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે છે પાસા પર (i) A મળે (ii) D મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

20*. ધારો કે, એક પાસાને તમે યાદચ્છિક રીતે આકૃતિ 15.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે લંબચોરસ ક્ષેત્ર પર ફેંકો છો. તે 1 મી વ્યાસના વર્તુળની અંદર પડશે તેની સંભાવના કેટલી ?



આકૃતિ 15.6

21. એક જથ્થો 144 બૉલપેન ધરાવે છે. તેમાંથી 20 ખામીયુક્ત અને બાકીની સારી છે. જો પેન સારી હશે તો, નુરી પેન ખરીદશે, પરંતુ જો તે ખામીયુક્ત હશે તો ખરીદશે નહિ. દુકાનદાર યાદચ્છિક રીતે એક પેન કાઢે છે અને તેને આપે છે.

(i) તે પેન ખરીદશે તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે પેન નહિ ખરીદે તેની સંભાવના કેટલી ?

22. ઉદાહરણ 13 નાં સંદર્ભમાં (i) નીચે આપેલ કોષ્ટક પૂરું કરો :

ઘટના : 'પાસા પરનો સરવાળો'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) એક વિદ્યાર્થી દલીલ કરે છે કે 11 શક્ય પરિણામો 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 છે. તેમાંનાં પ્રત્યેકની સંભાવના $\frac{1}{11}$ છે. શું આપ આ દલીલ સાથે સહમત છો ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

23. એક રમતમાં એક રૂપિયાના સિક્કાને 3 વાર ઉછાળવાનો છે અને તેના પરિણામ દરેક વખતે નોંધવાના છે. જો તમામ વખત ઉછાળતાં સરખું પરિણામ મળે, એટલે કે ત્રણ છાપ અથવા ત્રણ કાંટા તો હનિફ રમત જીતી જાય છે, અન્યથા હારે છે. તો હનિફ રમત હારે તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

24. પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે :

(i) એક પણ વખત ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે નહિ.

(ii) ઓછામાં ઓછી એકવાર ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

[**સૂચન :** એક પાસાને બે વાર ઉછાળવો અને બે પાસાને એક સાથે ઉછાળવા, એ બંનેને એક જ પ્રયોગ ગણવામાં આવે છે.]

25. નીચેનામાંથી કઈ દલીલો સાચી છે અને કઈ સાચી નથી ? તમારા જવાબ માટે કારણો આપો.

(i) જો બે સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો ત્રણ શક્યતાઓ મળે છે - બે છાપ અથવા બે કાંટા અથવા પ્રત્યેકનો એક તેથી, આ પ્રત્યેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે.

(ii) જો પાસાને ઉછાળવામાં આવે તો બે શક્ય પરિણામો મળે છે - અયુગ્મ સંખ્યા અથવા યુગ્મ સંખ્યા, તેથી અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય 15.2 (વૈકલ્પિક)*

1. બે ગ્રાહકો શ્યામ અને એકતા એક જ અઠવાડિયામાં (મંગળવાર થી શનિવાર) કોઈ ચોક્કસ દુકાનની મુલાકાત લે છે. દરેક વ્યક્તિ કોઈ પણ દિવસે દુકાનની મુલાકાત, અન્ય દિવસની જેમ જ લે છે. બંને વ્યક્તિ દુકાનની મુલાકાત (i) એક જ દિવસે (ii) ક્રમિક (એક પછી એક) દિવસોએ (iii) જુદા-જુદા દિવસોએ લેશે તેની સંભાવના કેટલી ?

2. પાસા પર સંખ્યાઓ એ રીતે લખવામાં આવી છે કે તેનાં પૃષ્ઠ, સંખ્યાઓ 1, 2, 2, 3, 3, 6 દર્શાવે છે. તે પાસાને બે વાર ઉછાળવામાં આવે છે અને બંને પાસા પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો પાછળના કોષ્ટકમાં નોંધી તે પૂર્ણ કરો :

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

	પ્રથમવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ					
+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

બીજીવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ

કુલ સરવાળો

(i) યુગ્મ મળે. (ii) 6 મળે. (iii) ઓછામાં ઓછો 6 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

3. એક થેલામાં 5 લાલ દડા અને કેટલાંક વાદળી (ભૂરા) દડા છે. જો ભૂરો દડો નીકળવાની સંભાવના લાલ દડો નીકળે તેની સંભાવના કરતાં બમણી હોય, તો થેલામાં રહેલા ભૂરા દડાઓની સંખ્યા શોધો.

4. એક પેટીમાં 12 દડા છે. તેમાંના x દડા કાળા છે. જો પેટીમાંથી એક દડો યાદૃચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે કાળો દડો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

જો બીજા 6 કાળા દડા ખોખામાં મૂકવામાં આવે તો કાળો દડો નીકળવાની સંભાવના હવે પહેલાં હતી તેનાં કરતાં બમણી થાય છે, તો x શોધો.

5. એક બરણીમાં 24 લખોટીઓ છે, કેટલીક લીલી અને બાકીની ભૂરી છે. બરણીમાંથી જો એક લખોટી યાદૃચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે લીલી હોય તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. બરણીમાંની ભૂરી લખોટીઓની સંખ્યા શોધો.

15.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે :

1. પ્રાયોગિક સંભાવના અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવના વચ્ચેનો તફાવત

2. ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, સંકેત P(E) વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$P(E) = \frac{\text{E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}}$$

આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

3. ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના 1 છે.

4. અશક્ય ઘટનાની સંભાવના 0 છે.

5. ઘટના E ની સંભાવના એ સંખ્યા P(E) છે

તથા, $0 \le P(E) \le 1$

6. માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી ઘટનાને પ્રાથમિક (મૂળભૂત) ઘટના કહે છે. પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે.

7. કોઈ પણ ઘટના E માટે $P(E) + P(\overline{E}) = 1$. $\overline{E}$ એ ઘટના 'E નહિ' દર્શાવે છે. E અને $\overline{E}$ પૂરક ઘટનાઓ કહેવાય છે.

વાચકને નોંધ

ઘટનાની એક પ્રાયોગિક અથવા પ્રયોગમૂલક સંભાવના એ હકીકતમાં જે બન્યું છે તેના પર આધારિત છે અને ઘટનાની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, ચોક્કસ ધારણાઓના આધાર પર શું ઘટિત થશે તેની આગાહી કરવાના પ્રયત્નો કરે છે. જેમ પ્રયોગ કરવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ આપણે અપેક્ષા રાખી શકીએ કે, પ્રાયોગિક અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાઓ લગભગ સમાન થાય છે.

G1Z9I2